Lez. 1 --- 28/02

La matematica ha una storia?

Fin dalle antiche civiltà, popoli diversi hanno gradualmente acquisito delle conoscenze matematiche che hanno poi trasmesso alle generazioni successive. Si sono così formate diverse tradizioni, che sono poi state lette e interpretate dalla cultura greca grazie a viaggiatori intellettuali, per cui si è arrivati a parlare di una unica tradizione matematica, quasi fosse atemporale.
Lo storico della matematica si interessa della trasmissione (radici e interpretazioni) della materia.
La matematica è espressione dell'uomo, è stata pensata ed elaborata razionalmente dall'uomo nel corso del tempo, perciò risente dello sviluppo umano. Aristotele, ad esempio, affermava che la matematica, e in particolare la gli enti geometrici, è qualcosa che è dentro di noi e non al di fuori di noi.

IL METODO SCIENTIFICO, LA SCIENZA, LE SCIENZE

Che cos'è la scienza? Quando un certo sapere si può definire "scienza"?
Platone ne da una sua definizione in uno dei "Dialoghi", il "Teeteto", tramite un dialogo tra Teeteto, giovane matematico greco che in questo passo cerca una definizione di "scienza", e Socrate:

1. Scienza è sensazione. La critica mossa da Socrate a questa affermazione di Teeteto è che tutti gli esseri umani e gli animali hanno capacità di percezione dalla nascita, e le sensazioni sono istantanee, mentre la scienza è qualcosa di razionale che si elabora man mano.
2. Scienza è opinione. Teeteto aggiunge che tale opinione sia da considerarsi vera. La critica a tale affermazione è che se anche l'opinione fosse vera, non sarebbe comunque scienza. Per spiegarlo, Socrate prende ad esempio gli avvocati, che con la loro arte persuadono il giudice affinchè emetta la sua sentenza dopo essersi fatto una opinione che ritiene vera, tuttavia egli giudica senza scienza, poichè seppure egli la considera vera, la sua è un'opinione di qualcosa che non ha visto costruita sulla base del "sentito dire".
3. Scienza è opinione vera accompagnata da spiegazione. Seppure una tale affermazione indichi un processo di ragionamento, per ritenerla valida sarebbe necessario definire il significato di "spiegare"; tuttavia, che sia:

- manifestare il proprio pensiero per mezzo della voce;
- dare una descrizione analitica (elemento per elemento) di ciò di cui si sta parlando;
- indicare la differenza tra un elemento e un altro (cosa che presuppone la conoscenza degli elementi di cui si parla);

in realtà nessuno di questi significati può giustificare l'essere scienza.
In definitiva, nessuna delle definizioni proposte da Teeteto è esaustiva, perciò non

possono essere accettate. Platone indica come modello di scienza proprio la matematica, perchè consente di arrivare alla vera sapienza.

Aristotele, invece, afferma che:

"Scienza è conoscere per cause. Scienza è sapere per dimostrazione".

La dimostrazione si esprime attraverso un silogismo scientifico che procede da principi, da protasi vere, immediate, più note, anteriori, e causa delle conclusioni. Ogni elemento è una conseguenza dell'elemento che lo precede, senza salti logici. I pricipi sono indispensabii per le conclusioni e, nello stesso tempo, devono essere pertinenti con le conclusioni che ne derivano. Non esiste una scienza senza principi, così come non esiste una dimostrazione che non sia scientifica (la dimostrazione è qualcosa che appartiene solo alla scienza).
Solo le conclusioni devono essere dimostrate.
La verità appartiene alla conoscienza scientifica e all'intuizione. L'intuizione è l'ambito entro cui scegliere i principi.
I principi e le conclusioni si esprimono entrambi per mezzo di proposizioni (perciò è errato considerare proposizione solo l'enunciato di un teorema, lo è anche la sua dimostrazione). Un enunciato non contiene in sè un carattere di verità o di falsità, ma questo gli viene attribuito soltanto tramite dimostrazione.

Aristotele ha così individuato la STRUTTURA EPISTEMOLOGICA di una scienza, cioè ha stabilito gli elementi che definiscono una scienza come tale, cioè: principi e conclusioni, o conseguenze (da dimostrare).
Nella matematica in particolare i principi sono DEFINIZIONI, POSTULATI e ASSIOMI, e le conclusioni sono PROBLEMI e TEOREMI, cui si arriva attraverso le DIMOSTRAZIONI (particolare forma di sillogismo scientifico in cui attraverso un ragionamento deduttivo si arriva a delle conclusioni). Perciò la matematica si può considerare una scienza, perchè ne possiede gli elementi strutturali.

LA GEOMETRIA ELEMENTARE

Euclide, il primo libro degli "Elementi" e la sua struttura epistemologica.

Excursus storico:
Nel 331 a.C. Alessandro Magno, allievo di Aristotele (che lo istruì a diffondere la cultura), fondò Alessandria.
Nel 323 a.C morì, e i suoi generali si divisero il regno e crearono nuovi centri di cultura, che si affiancarono ad Atene; si parla di cultura ellenistica.
In Egitto regnava Tolomeo I, che creò ad Alessandria il Museo, con al centro la Biblioteca, attorno alla quale si svolgevano diverse attività. Tolomeo I chiamò Euclide ad insegnare matematica. Non abbiamo notizie certe su Euclide.

Possiamo dire che è vissuto tra il IV e il III secolo a.C. e che ha svolto la sua attività di insegnante presso il Museo di Alessandria tra il 300 e il 280 a.C.. Inizialmente la sua identità veniva confusa con quella di Euclide di Megara, allievo di Socrate, ma venne fatta chiarezza nella seconda metà del 1500 da Cristoforo Clavio, e, appurato che fossero due personalità distinte, l'Euclide cui facciamo riferimento venne nominato Euclide di Alessandria.
Ad Euclide sono attribuiti diversi scritti. Lo scritto principale ha il titolo: "Elementi"; questa non è un'opera nuova per i contenuti, ma il merito di Euclide è di aver raccolto gran parte della matematica prodotta fino a quel momento ordinandola secondo un preciso schema logico (quello proposto da Aristotele).
Il "Commento al primo libro degli Elementi" di Proclo contiene notizie raccolte sugli "Elementi" (e anche su altri matematici e sulle loro opere) in otto secoli, ovvero da Euclide (III secolo a.C.) a Proclo stesso (V secolo d.C.).

ELEMENTI

Gli "Elementi" sono composti da 13 libri:
I-IV geometria piana: geometria assoluta (cioè le cui proposizioni sono valide in qualsiasi ambito della geometria), geometria euclidea (cioè quella geometria le cui proposizioni dipendono dai principi scelti da Euclide, I e II), geometria del cerchio (III), poligoni regolari (IV).
V teoria delle proporzioni tra grandezze commensurabili.
VI applicazioni geometriche piane della teoria delle proporzioni (similitudine tra figure piane).
VII-IX linee essenziali dell'aritmetica e alcune questioni di teoria dei numeri (erano consciuti solo i naturali). In questi libri l'1 è chiamato "unità" e non si considera lo "zero" come numero perchè al tempo si faceva particolare riferimento alla geometria in quanto i teoremi e tutto ciò che veniva affermato nell'ambito della geometria euclidea poteva avere un riscontro materiale, ed anche i numeri venivano considerati in rapporto ad enti geometrici, in particolare in rapporto a segmenti; graficamente, in particolare in quanto lunghezza di un segmento, lo zero non era rappresentabile.
X teoria di linee rette commensurabili o incommensurabili tra loro.
XI questioni racchiuse dai Greci sotto il termine di "stereometria". Questo libro può essere considerato una generalizzazione dei libri I, V ai solidi elementari (quindi alle figure tridimensionali).
XII questioni che riguardano la misura del cerchio, della piramide, del cono e della sfera, trattate con il metodo di esaustione (molto utilizzato da Archimede).
XIII costruzione dei cinque poliedri regolari (tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro), detti anche "solidi platonici", nella sfera.

La tradizione attribuisce a Euclide altri due libri degli "Elementi":
XIV (attribuito da molti a Ipsicle); XV (attribuito da molti ad Isidoro di Mileto).

Questioni che riguardano la valutazione e la composizione degli "Elementi":
● Questione relativa all'unità di composizione dello scritto: i 13 libri non seguono lo stesso stile matematico, perciò gli storici hanno formulato due ipotesi:

1. Euclide era a capo di un gruppo di matematici che hanno redatto l'opera sotto le sue direttive (storicamente più verosmile);
2. "Euclide" era in realtà uno pseudonimo dietro il quale si nascondeva uno o più matematici (ipotesi meno verosimile secondo la mentalità del tempo).

● Questione riguardante la "struttura interna" dei libri: dall'analisi delle proposizioni presentate nel testo si crede che sia stata un'opera scritta con finalità didattica, molto probabilmente nata dagli appunti delle sue lezioni.

Secondo quanto riportato da Proclo:
Euclide ha scritto "Elementi" come titolo del suo scritto in base ai fatti matematici che presenta e in base ai discenti.
Sono chiamati "elementi" quei teoremi che conducono alla conoscenza di altri, "elementari" quei teoremi che sono semplici e si applicano in molti altri.
Scegliere gli elementi è un compito difficile perché bisogna preoccuparsi di togliere il superfluo, della chiarezza, della concisione, della comprensione...

Struttura epistemologica:
PRIMI PRINCIPI: definizioni, postulati, nozioni comuni o assiomi
e CONSEGUENZE: problemi e teoremi
Da questo punto di vista è il libro più completo. Contiene tutti gli emenenti costitutivi della scienza, per cui si pone come modello per la struttura che una scienza deve seguire.

- DEFINIZIONI: permettono di individuare dei termini specifici in relazione ai contenuti che si vogliono presentare (si descrive un oggetto e si associa ad un termine univoco che lo indichi). Forniscono una sorta di vocabolario essenziale dei termini usati in geometria e aritmetica.
- POSTULATI: proposizioni ritenute vere in ragione della loro evidenza basata sull'intuizione.
- ASSIOMI: proposizioni ritenute vere in ogni ambito della nostra conoscenza (rapportate al tempo).

Nel contesto Euclideo vi è una netta differenza tra postulati e assiomi: sono entrambe proposizioni che non necessitano di dimostrazione, ma mentre i postulati sono applicabili in un determinato campo, gli assiomi valgono in ogni ambito.

- PROBLEMI: proposizioni per la cui risoluzione è essenziale la costruzione di figure geometriche (se il teorema è geometrico).
- TEOREMI: proposizioni dimostrate attraverso un'argomentazione (ragionamento) e che hanno per oggetto le proprietà delle figure geometriche (se il teorema è geometrico). La costruzione geometrica associata tuttavia non è necessaria alla risoluzione, nonostante sia d'aiuto.
- DIMOSTRAZIONI: ragionamento che dalle premesse porta alle conclusioni.

Lez. 2 --- 01/03

Alcune scelte di Euclide nella presentazione degli "Elementi":

1. Metodo con ci presentare i contenuti: dall'universale verso il particolare. Si credeva che la geometria avesse lo scopo di risolvere i problemi concreti; a questo proposito Euclide poteva scegliere tra due opzioni: utilizzare il metodo analitico (quello dei filosofi, inteso come modo di procedere), cioè partire dall'analisi di un oggetto tridimensionale per arrivare allo studio del tutto (dal particolare all'universale), oppire il metodo sintetico, cioè il procedimento contrario per cui si parte dall'universale per arrivare al particolare, secondo lo schema: punto -> segmento -> superficie piana -> corpo tridimensionale.

2. Nella "sua" visione delle "parallele" non c'è collegamento tra perpendicolarità e parallelismo; cioè la definizione di rette parallele che utilizza il concetto di perpendicolarità (*"Due rette sono parallele se hanno la stessa perpendicolare"*) è matematicamente corretto, ma è inesatto presentarla come "euclidea".

3. *"La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti"*. Questa affermazione è vera solo nella geometria euclidea.

4. Euclide sceglie di dare maggiore spazio alla geometria rispetto all'aritmetica, perchè la geometria permette di visualizzare, attraverso la costruzione di una figura, ciò di cui si parla. Ogni figura è un caso particolare, ma è portatrice di caratteristiche universali.

PRIMO LIBRO DEGLI "ELEMENTI"

Qui Euclide presenta:
23 definizioni;
5 postulati;
5 assiomi (in realtà ne sono pervenuti 9 ma solo 5 gli sono riconosciuti);

48 proposizioni.
Alcune DEFINIZIONI:
In questo libro Euclide tratta unicamente la geometria piana.

I,1. *"Il punto è ciò che non ha parti".*
Il punto è un ente geometrico indivisibile ed universale, in alcuni scritti greci viene indicato con due termini: "stigmé", che indica il segno che lascia ad esempio la punta di una lancia scagliata contro un bersaglio (anche il segno che lascia la punta di una matita poggiata su un foglio), e "seméion", cioè "segno" inteso come la manifestazione di qualcosa che ancora non è specificato (oggi esiste anche la "geometria dei segni", cioè una geometria che focalizza la attenzione sugli aspetti formali, sui simboli ma non sul loro significato). La definizione di Euclide del punto come ente geometrico ha creato problemi, perchè gli enti geometrici erano definiti come qualcosa di quantificabile, di divisibile. Oggi il punto, la retta e il piano non vengono definiti, ma assunti come enti fondamentali, tramite i quali si definiscono tutti gli altri enti. Questa differenza è dovuto al diverso significato del termine "definizione": per Euclide si trattava di descrivere qualcosa di esistente, mentre oggi questo significato viene ampliato, assumendo la possibilità di dare vita a quel qualcosa, quasi che prima di definirlo non esistesse.

I,2. *"La linea è una lunghezza senza larghezza".*
Cioè è un ente unidimensionale.

I,3. *"Gli estremi di una retta sono punti".*
Corrisponde alla nostra definizione di segmento.

I,4. *"La linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa".*
Questa definizione potrebbe riflettere la formazione platonica di Euclide, ed essere intesa come la poiezione della retta perfetta che giace nell'iperuranio. Oppure Euclide potrebbe intendere che non ci sono punti privilegiati, cioè che godono tutti delle stesse proprietà. La retta è anche stata definita da Archimede come *"la linea più corta fra due punti"*, e da alcuni studiosi arabi tramite il concetto di movimento utilizzato in meccanica, come *"la linea generata dal flusso continuo di un punto che si muove di moto rettilineo uniforme"*.

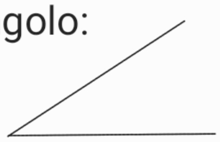
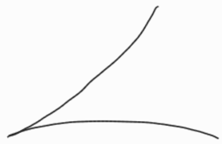
I,5. *"La superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza"*.

I,6. *"Gli estremi di una superficie sono linee".*

I,7. "*La superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di* *essa".*

I,8. *"L'angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrano fra loro e non giacciono in linea retta".*

Da questa definizione, poichè si parla di linee e non di rette si possono ricavare tre tipi di angolo:


RETTILINEO CURVILINEO MISTILINEO

Inoltre, specificando che non giacciono in linea retta, Euclide esclude l'angolo piatto. Oggi lo consideriamo un vero angolo se definiamo l'angolo come una regione di piano delimitato da due linee.

I,10. *"Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata".*

I,14. *"Figura è ciò che è compreso da uno o più termini".*

Cioè finita, limitata. Ciò sottintende che per Euclide non esistano figure indefinite.

I,15. *"Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali giacciono sulla [stessa] linea, [cioè sulla circonferenza del cerchio], a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro".*

I,23. *"Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti".*

Il problema che sorge da quest'ultima definizione è dovuta all'utilizzo del termine "illimitato", che presuppone l'assunzione dell'inifinito come realtà geometrica. Al tempo, invece, si considerava la distinzione di Aristotele tra:

- infinito in atto: esiste nella realtà (ai tempi di Euclide riservato al divino).
- infinito in potenza: potrebbe verificarsi ma non è certo.

POSTULATI (scelti sulla base dell'intuizione)

A partire dalla seconda metà del '500 sono state incluse tra i postulati alcune proposizioni che erano state dimostrate; questo sembra in conflitto con la definizione stessa di postulato (letteralmente "richiesta"), tuttavia è possibile, a condizione che venga assunta in quell'ambito come verità assoluta, per cui non

ne viene più considerata la dimostrazione.
I) *"Risulti postulato che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto".*
Nell'enunciato si postula l'esistenza della retta, mentre oggi se ne considera anche l'unicità (*"Dati due punti, per questi punti passa una E UNA SOLA retta"*), che è conseguenza di una delle proposizioni successive.

II) *"E che una retta terminata si possa prolungare continuamente* (cioè secondo il continuo) *in linea retta".*
Oggi è detto postulato dell'infinità della retta, differente per la concezione di infinito: per Euclide era in potenza, oggi si considera in atto.

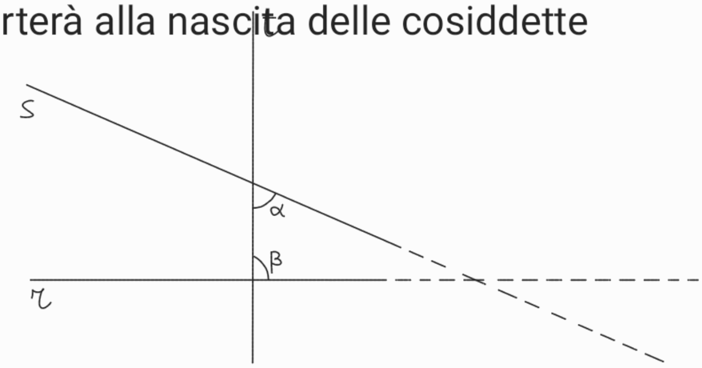
III) *"E che si possa descivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza".*
La necessità di formulare questo postulato deriva dalla necessità di specificare che si può costruire un cerchio anche senza gli strumenti (che al tempo di Euclide erano una riga non graduata e un compasso che non manteneva l'apertura, quindi la misura dell'ampiezza, una volta sollevato dal foglio).

I POST. I-III sono di carattere costruttivo. Nonostante questo, Euclide non nomina mai esplicitamente gli strumenti da disegno, perchè vuole mantenere un carattere prettamente teorico, e così trasmette che quello che lui afferma è valido anche senza l'utilizzo degli strumenti.

IV) *"E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro".*
Lo specifica perchè nella definizione I,10 vengono effettivamente considerati solo gli angoli adiacenti, perciò è necessario estenderla.

V) *"E che, se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti* (cioè tali che la loro somma sia minore di due retti, quindi di 180°), *allora le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti".*

La DEF. I,23 e il POST. V porteranno a quello che è chiamato "problema delle parallele", che verrà risolto solo nel 1800 e porterà alla nascita delle cosiddette geometrie non euclidee.



Il POST. V costituì un problema sia per la questione dell'infinito (come la DEF. I,23) sia perchè è un postulato non evidente, perchè dipende dalle posizioni di r ed s e il

loro punto di incontro potrebbe non essere determinato.
ASSIOMI (o NOZIONI COMUNI) :
I) *"Cose che sono uguali a una stessa sono uguali anche fra loro".*
II) *"Se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali".*
III) *"Se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali".*
VII) *"Cose che coincidono fra loro sono uguali fra loro".*
VIII) *"Il tutto è maggiore della parte".*

L'utilizzo del termine "cose" è dovuto alla volontà di Euclide di evidenziare la validità di tali assiomi (come da definizione) in ogni ambito, non solo in quellllo geometrico. L'eguaglianza cui fa riferimento Euclide è da considerarsi in senso di equivalenza (perciò quando afferma che due figure sono uguali intende che hanno la stessa area).

La nozione VIII oggi non viene accettata, perchè in realtà vale solo per insiemi finiti. Infatti si definisce un insieme infinito quando esiste una corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

PROPOSIZIONI
Indichiamo con A l'ipotesi, o i dati, e con B la tesi, o ciò che è richiesto, e consideriamo una proposizione: A => B
Da questa proposizione diretta, si possono costruire:
proposizione inversa: B => A
proposizione contraria: ¬A => ¬B
proposizione inversa della contraria: ¬B => ¬A
proposizione contraria dell'inversa: ¬B => ¬A
Le ultime due sono uguali e si unificano come proposizione contronominale.
Con queste proposizioni si può cotruire il QUADRILATERO LOGICO:

Prop. Diretta A => B	-----	Prop. Inversa B => A
|		|
Prop. Contraria ¬A => ¬B	-----	Prop. contronominale ¬B => ¬A

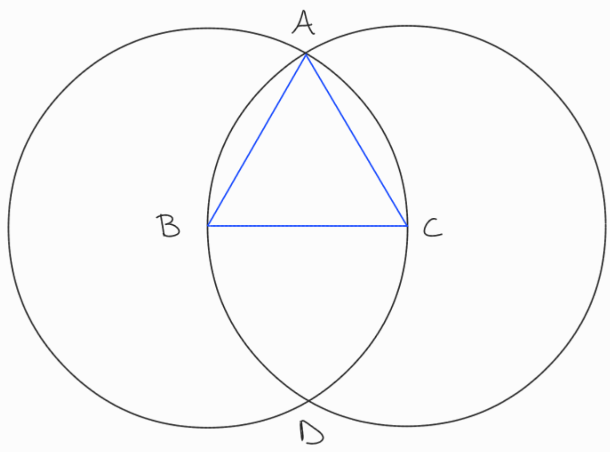
Le dimostrazioni a tali proposizioni conosciute da Euclide sono:
dimostrazione diretta (dall'ipotesi alla tesi)
dimostrazione per sovrapposizione (traslando due figure si sovrappongono)
dimostrazione per assurdo (in genere usata per le inverse; vedi sotto)

dimostrazione con il metodo di esaustione.
Nella dimostrazione per assurdo si nega la tesi (¬B) e si considera l'ipotesi (A), e si cerca una contraddizione di qualcosa precedentemente dimostrato.
Per Euclide tutte le dimostrazioni sono ugualmente valide, come anche oggi, tuttavia in alcune epoche la dimostrazione per sovrapposizione non veniva accettata, poichè sovrapporre due figure implicava uscire dal piano e passare ad un'altra dimensione, in cui non sappiamo come si comportano gli enti. Oggi viene accettata perchè di fatto vengono considerate solo la condizione iniziale e quella finale, mentre lo spostamento viene definito "movimento statico".

Lez. 3 --- 07/03
Alcune proposizioni del primo libro degli "Elementi":

I,1. *"Su una retta terminata data* (cioè un segmento)*, costruire un triangolo equilatero".*

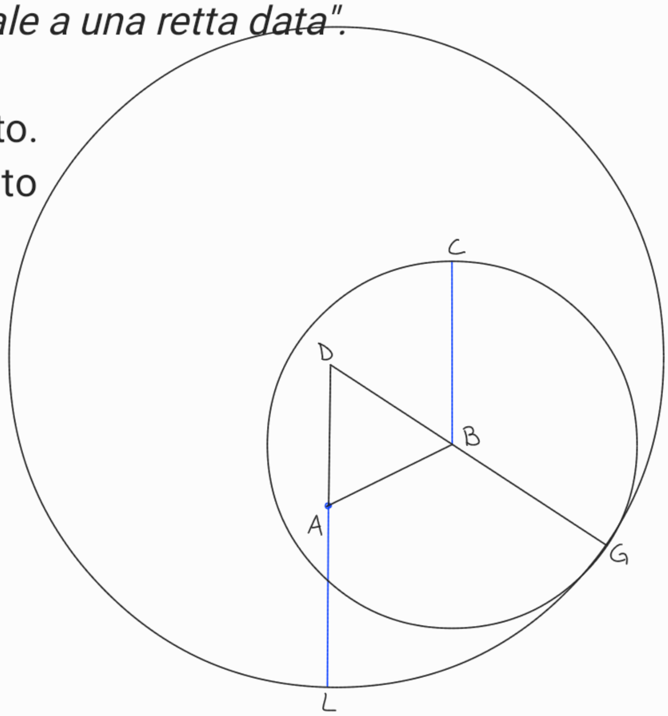
Sia BC il segmento dato.
Si punti il compasso in B con ampiezza uguale a BC e si tracci una circonferenza.
(Si parla di "costruzione con riga e compasso" se si può disegnare anche solo con questi strumenti, più o meno moderni che siano).
Si punti il compasso in C con ampiezza uguale a BC e si tracci una circonferenza.
Si unisca uno dei due punti A o D di intersezione delle due circonferenze, ad esempio A, con i punti B e C.
Si otterrà il triangolo ABC.



Bisogna ora effettuare un ragionamento (dimostrazione) sulla figura per vedere che il triangolo è equilatero:
AB=BC perchè raggi della stessa circonferenza di centro B e raggio BC.
BC=AC perchè raggi della stessa circonferenza di centro C e raggio BC.
Per la proprietà transitiva (ASS. I) si ha AB=BC=AC.
Allora il triangolo ABC è equilatero.

Questa proposizione è un esempio di problema, perché necessita della costruzione della figura geometrica, e questo si evince anche direttamente dall'enunciato della proposizione: se si chiede di costruire qualcosa che prima non c'era si tratta di un PROBLEMA, mentre nel caso del TEOREMA si chiede di

dimostrare qualcosa.
I,2. *"Applicare a un punto dato una retta uguale a una retta data".*



Siano A un punto dato e BC un segmento dato.
Si unisca A con B e si costruisca sul segmento AB il triangolo equilatero ABD (PROP. I,1).
Si tracci la circonferenza di centro B e raggio BC.
Si prolunghi DB fino a G che si trova sulla precedente circonferenza.
Si tracci la circonferenza di centro D e raggio DG.
Si prolunghi DA fino a L che si trova sulla circonferenza apppena tracciata.

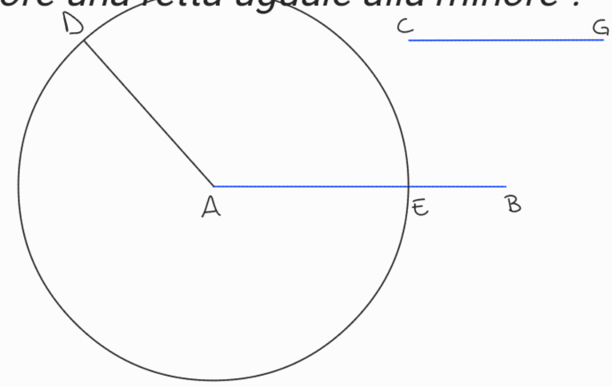
Allora:
BC=BG perchè raggi della stessa circonferenza di centro B e raggio BC.
DL=DG perchè raggi della stessa circonferenza di centro D e raggio DG.
Essendo DL=DA+AL e DG=DB+BG si ha DA+AL=DB+BG.
Togliendo da due quantità uguali una stessa quantità (o quantità uguali) restano due quantità uguali (ASS. III), per cui AL=BG.
Essendo BG=BC, per l'ASS. I si ha AL=BC.

Questa proposizione permette di traslare (trasportare) un segmento in modo che abbia come estremo un qualsiasi punto del piano.
Successivamente la traslazione del segmento spesso si assume come postulato.

Oggi, un metodo per costruire un segmento uguale ad uno dato si utilizza il compasso, lo si punta in un estremo del segmento dato con apertura uguale alla lunghezza del segmento, poi lo si punta in un altro punto del piano con la stessa apertura, ma questa costruzione non può essere definita euclidea perché si necessita di un compasso mantenga l'apertura una volta alzato dal foglio, cosa che con gli strumenti di Euclide non era possibile fare.
Non è possibile considerare costruzioni euclidee se si eseguono con strumenti diversi da riga e compasso oppure se con gli strumenti posseduti da Euclide non si possono costruire.

Le prime 3 proposizioni sono esempi di problemi, quindi necessitano di costruzione. Euclide inizia dai problemi perchè vuole abituare i suoi studenti all'uso degli strumenti da disegno; in ogni caso non solo le prime proposizioni

sono esempi di problemi, ma anche tra quelle successive ne presenterà altri.
3. *"Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore".*



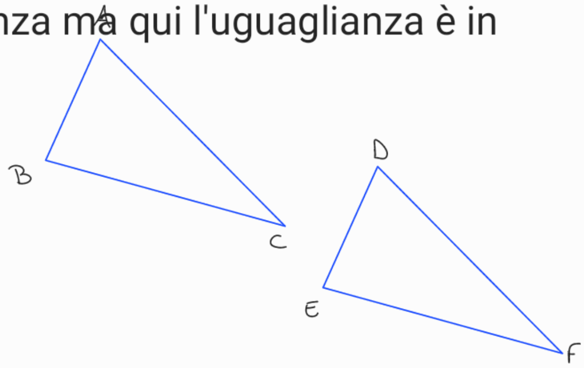
Siano AB e CG due segmenti tali che AB>CG.
Si applichi nel punto A il segmento AD
uguale al segmento CG (PROP. I,2).
Si tracci la circonferenza di centro A
e di raggio AD.

AE=AD perchè raggi della stessa circonferenza.
Essendo AD=CG (per costruzione, PROP. I,2), per la proprietà transitiva (ASS. I) si ha AE=CG.

Grazie a questa proposizione è possibile traslare un segmento in una direzione prefissata (su una retta data).
Il POST. III afferma che si può costruire un qualsiasi cerchio dato un centro e un raggio, ma la costruzione di questo postulato richiede che il raggio sia attaccato al centro, cioè il punto dato è il centro. Con le PROP. I,2 e I,3 possiamo anche costruire una circonferenza avente per centro un punto qualsiasi, con raggio uguale ad un segmento dato non necessariamente attaccato al centro (perché possiamo effettuare una traslazione).

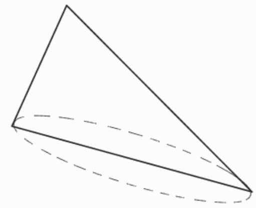
4. *"Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati e hanno uguali gli angoli compresi fra i due lati, avranno anche la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti [del primo], opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [del secondo]".*
Questo è il primo TEOREMA che si incontra negli "Elementi".

Oggi è il PRIMO CRITERIO DI CONGRUENZA, enunciato come:
"Dati due triangoli, se hanno rispettivamente uguali i due lati e l'angolo tra essi compreso allora i due triangoli sono congruenti".
Nel dire che i due triangoli sono uguali, Euclide aggiunge e specifica che essi oltre ad avere la stessa area hanno uguali tutti gli elementi, perché nei suoi enunciati il concetto di uguaglianza è inteso come equivalenza ma qui l'uguaglianza è in senso stretto.



Siano ABC e DEF due triangoli aventi
AB=DE, AC=DF e BÂC=EDF.
Si sovrapponga il triangolo ABC al triangolo DEF
in modo tale che il punto A coincide con

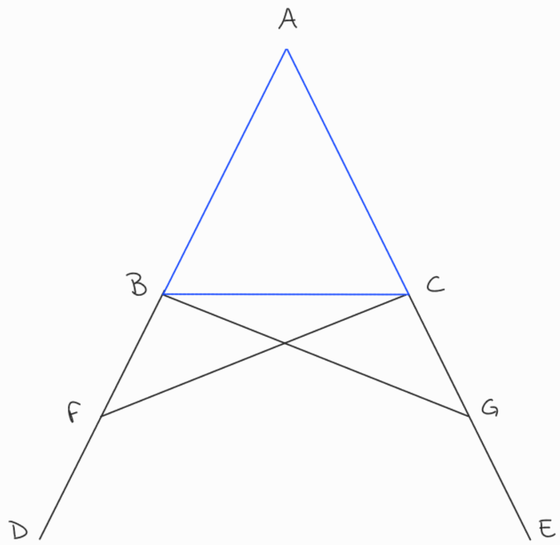
il punto D e la retta AB con la retta DE.
Poichè AB=DE, anche il punto B coinciderà con il punto E.
Poichè AB coincide con DE e BÂC=EDF, la retta AC coinciderà con la retta DF.
Poichè AC=DF, il punto C coinciderà con il punto F.
Poichè B coincide con E e C coincide con F, anche la base BC dovrà coincidere con la base EF.



Infatti, se questo non succedesse
(cioè se BC non coincidesse con EF),
poichè B coincide con E e C con F,
due rette (BE ed EF) comprenderebbero
uno spazio, il che è impossibile.
Dunque i due triangoli ABC e DEF coincideranno e saranno uguali.

5. *"Nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali gli angoli sotto la base saranno [pure] uguali fra loro".*

Anche questa proposizione è un esempio di TEOREMA.
Si parla di definizione (e non di proprietà) se si considerano solo i lati: un triangolo avente due lati uguali è un triangolo isoscele. L'uguaglianza degli angoli necessita di dimostrazione.

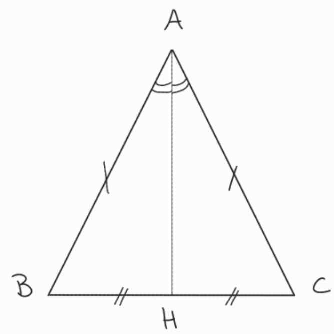


Sia ABC un triangolo isoscele nel quale AB=AC.
Si prolunghino i due lati AB e AC
rispettivamente fino ai punti D ed E.
Su BD si prenda un punto qulunque F.
Da AE si sottragga la retta AG=AF (cioè si prenda un punto G sul segmento CE tale che AG=AF, PROP. I,3).
Si congiunga F con C e G con B.

Consideriamo i triangoli AFC e ABG:
AF=AG per costruzione (PROP. I,3).
AB=AC per ipotesi.
FÂG in comune.
Per la PROP. I,4, i due triangoli sono uguali, e quindi sarà:
FC=BG
AĈF=AB̂G
AFC=AĜB

Poichè AF=AG per costruzione e, inoltre, AF=AB+BF e AG=AC+CG si ha

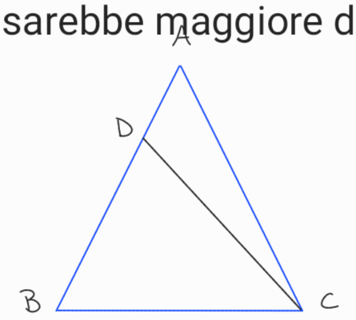
AB+BF=AC+CG. Essendo AB=AC per ipotesi, si deduce che BF=CG (ASS. III).
Si considerino i triangoli BFC e BCG:
BF=CG per dimostrazione.
FĈ=BG per dimostrazione.
BFC=BĜC per dimostrazione.
Per la PROP. I,4 i due triangoli sono uguali, e quindi sarà FB̂C=GĈB e BĈF=CB̂G.
Poichè AB̂G=AĈF per dimostrazione e inoltre AB̂G=AB̂C+CB̂G e AĈF=AĈB+BĈF , si ha AB̂C+CB̂G=AĈB+BĈF.
Essendo CB̂G=BĈF per dimostrazione, risulta AB̂C=AĈB, ossia che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti.



Oggi si dimostra nel modo seguente:
Consideriamo un triangolo isoscele ABC
Tracciamo la bisettrice di BÂC, così risulta BÂH=HÂC.
Consideriamo i due triangoli ABH e AHC:
AB=AC per ipotesi
AH in comune
BÂH=HÂC per costruzione.
Per il I criterio di congruenza (PROP. I,4) possiamo dire che ABH e AHC sono congruenti, in particolare AB̂C=AĈB.
In questo modo si dimostra anche che la bisettrice di un triangolo isoscele è anche altezza e mediana.
Apparentemente questa seconda dimostrazione è più semplice, perchè si hanno meno passaggi, ma concettualmente è più complessa perchè necessita di più prerequisiti, come la definizione di bisettrice di un angolo (semiretta) e di un triangolo (segmento).

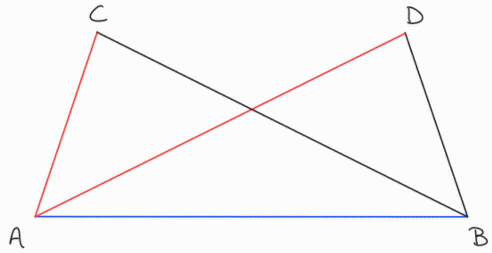
6. *"Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali fra loro".*

Sia ABC un triangolo avente AB̂C=AĈB. Si deve dimostrare AB=AC.
Per assurdo, AB e AC fossero disuguali, uno dei due sarebbe maggiore dell'altro.
Sia AB>AC.



Da AB si sottragga DB=AC (PROP. I,3)
e si congiunga D con C.
Si considerino i triangoli DBC e ACB:
DB=AC per costruzione.
BC in comune.
DB̂C=AĈB per ipotesi.
Per la PROP. I,4, i due triangoli sono uguali, cioè il triangolo minore DBC è uguale

al triangolo maggiore ABC, il che è assurdo.
7. *"Su una retta data e da ciascun suo estremo si conducano due rette che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte altre due rette rispettivamente uguali a quelle prima costruite e aventi un diverso punto di incontro".*

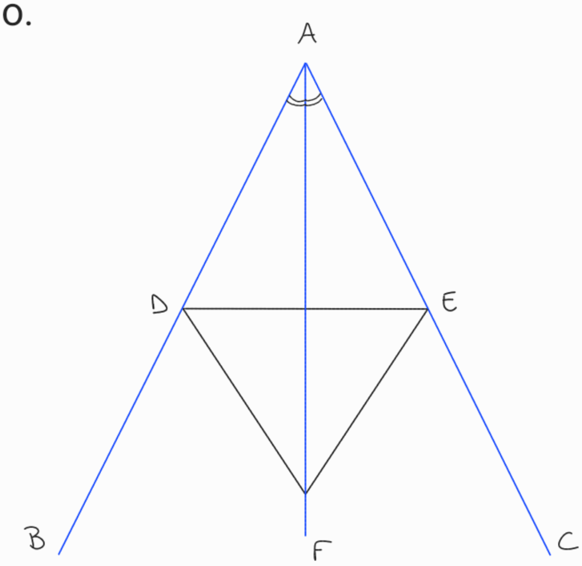


Dalla figura sembrerebbe che in realtà si possa fare, ma l'errore consiste nel fatto che i segmenti condotti dell'estremo A, cioè AC e AD, non sono uguali.

8. *"Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, e hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali".*

Questa proposizione corrisponde al nostro III CRITERIO DI CONGRUENZA.
Oggi generalmente i tre criteri di congruenza si enunciano uno di seguito all'altro, invece Euclide procede introducendoli soltanto nel momento in cui deve servirsene nelle dimostrazioni successive.

Lez. 4 --- 08/03
9. *"Dividere per metà un angolo rettilineo dato".*
PROBLEMA: costruire la bisettrice di un angolo.

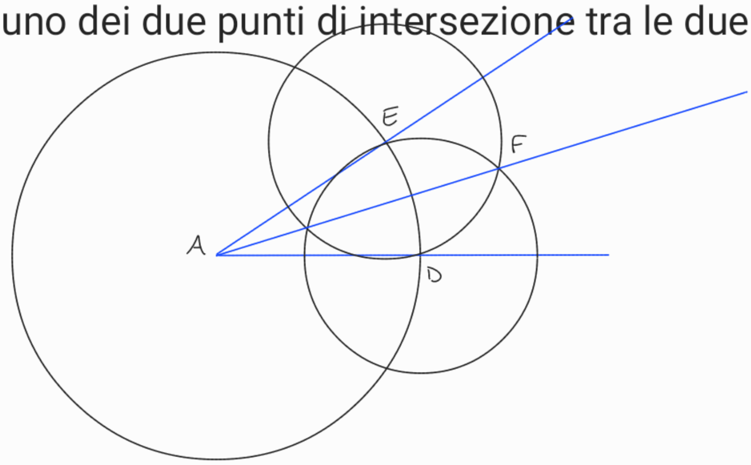


Sia BÂC l'angolo rettlineo dato.
Si prenda su AB un punto a piacere D.
Su AC si sottragga AE=AD (PROP. I,3)
e si congiunga D con E.
Si costruisca su DE il triangolo equilatero DEF (PROP. I,1).
Si congiunga A con F.

Si considerino i triangoli ADF e AEF:
AD=AE per costruzione (PROP. I,3).
AF in comune.
DF=EF perchè lati di uno stesso triangolo equilatero (PROP. I,1).
Per la PROP. I,8 (III criterio di congruenza) i due triangoli sono uguali.
Quindi DÂF=EÂF.

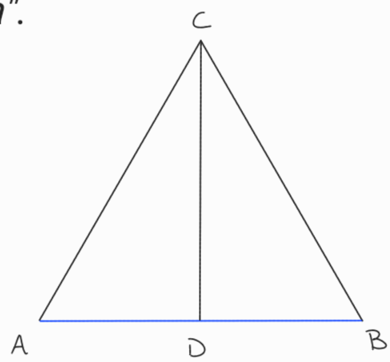
Anche oggi la costruzione è uguale, ma nei primi passaggi sui due lati dell'angolo si individuano i due punti E e D tali che AE=AD sempicemente tracciando una

circonferenza di centro A e raggio qualsiasi.
Si costruisce per il triangolo equilatero su DE, tracciando la corconferenza di centro D e raggio DE e la circonferenza di centro E e raggio DE.
Si congiunge A con uno dei due punti di intersezione tra le due circonferenze.



In questo modo Euclide dimostra anche che è possibile bisecare un angolo ma non trisecarlo utilizzando solo riga e compasso. Il problema della trisezione di un angolo, già considerato prima di Euclide, verrà risolto secoli dopo affermando che un angolo si può trisecare ma non utilizzando solo riga e compasso, quindi dando ragione ad Euclide; si potrà trisecare utilizzando altri strumenti oppure facendo riferimento alla costruzione delle coniche.

10. *"Dividere per metà una retta terminata data".*



Sia AB un segmento dato.
Si costruisca su AB il triangolo equilatero ABC (PROP. I,1).
Si divida l'angolo $A\hat{C}B$ a metà con la retta CD (PROP. I,9).

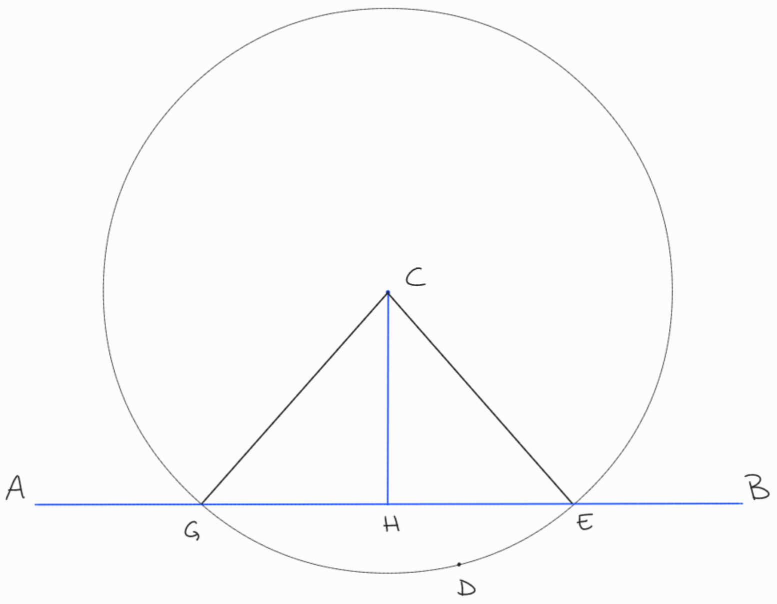
Si considerino i triangoli ADC e BCD.
AC=CB perchè lati dello stesso triangolo equilatero (PROP. I,1).
CD in comune.
$A\hat{C}D=B\hat{C}D$ perchè CD è bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$ (PROP. I,9).
Per la PROP. I,4 (I criterio di congruenza) i due triangoli sono uguali, in particolare AD=DB.

Oggi il punto medio di un segmento si costruisce in maniera molto simile, ma invece di tracciare la bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$ si traccia l'altezza CD, e i due triangoli risulterebbero cogruenti per il II criterio di congruenza. Tuttavia è necessario introdurre molti più elementi, tra cui la costruzione di una retta perpendicolare (PROP. I,11) e il II criterio di congruenza (PROP. I,26), pertanto con

le conoscenze acquisite fino a questo punto non sarebbe comprensibile.
11. *"Su una retta data, da un punto dato su di essa, innalzare una retta perpendicolare".*

Euclide ha introdotto dopo questa costruzione per permettere ai suoi studenti di comprendere la precedente dimostrazione anche con meno informazioni, in un modo più semplice e più veloce.

12. *"A una retta data illimitata, da un punto dato a essa esterno, condurre una linea retta perpendicolare".*



Sia AB la retta illimitata data e C un punto dato al di fuori di essa.
Si prenda dalla parte opposta di C, rispetto ad AB, un punto qualsiasi D.

Si tracci la circonferenza di centro C e raggio CD.
Si divida a metà il segmento EG nel punto H (PROP. I,10).
Si unisca il punto C con i punti G, H, E.

Si considerino i triangoli CGH e CEH:
GH=HE perchè H divide a metà EG (PROP. I,10).
CH in comune.
CG=CE perchè raggi della stessa circonferenza.

Per la PROP. I,8, i due triangoli sono uguali, e in particolare si ha $C\hat{H}G=C\hat{H}E$.
Essendo gli angoli $C\hat{H}G$ e $C\hat{H}E$ uguali e adiacenti, sono retti.
Dunque CH è perpendicolare ad AB.

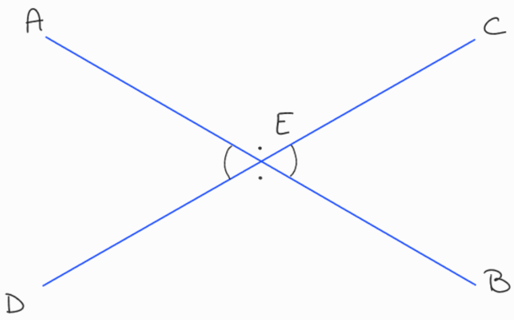
13. *"Se una retta innalzata su un'altra forma degli angoli, essa verrà a formare o due angoli retti o angoli la cui somma è uguale a due retti".*

14. *"Se per un punto di una retta, da parti opposte rispetto a essa, si tracciano due altre rette, e queste formano con la prima angoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, esse saranno per diritto fra di loro* (cioè in linea retta)*".*

Si possono considerare due proposizioni inverse: se la I,13 stabilisce che la somma di due angoli adiacenti è uguale a due retti, la I,14 afferma che, se la

somma di due angoli consecutivi è uguale a due retti, gli angoli sono adiacenti.
15. *"Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice tra loro uguali".*

Gli angoli si dicono opposti al vertice quando i lati di un angolo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.



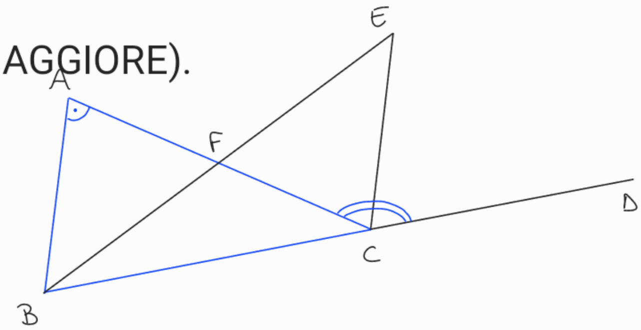
Si considerino le rette AB e CD che si intersecano nel punto E.

Si ha:
AÊC+CÊB=2R (PROP. I,13).
DÊA+AÊC=2R (PROP. I,13).

Poichè due quantità uguali ad una stessa sono uguali fra loro (ASS. I), si può scrivere AÊC+CÊB=DÊA+AÊC.
Poichè se da due quantità uguali si sottrae una stessa quantità i due resti sono uguali (ASS. III), si ottiene CÊB=DÊA.

16. *"In ogni triangolo, se si prolunga uno dei due lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni e opposti".*

Oggi è il TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO (MAGGIORE).



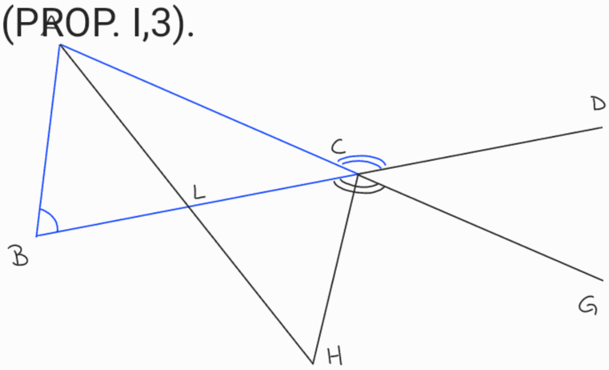
Si consideri un triangolo qualunque ABC.
Si prolunghi BC dalla parte di C individuando un punto D.
Si deve dimostrare che AĈD>BÂC e AĈD>AB̂C.

Dimostriamo che AĈD>BÂC:
Si divida AC in due parti uguali in F (PROP. I,10), si congiunga B con F, e si prolunghi BF fino al punto E in modo che BF=FE (PROP. I,3).
Si congiunga E con C.

Si considerino AFB e FEC:
BF=FE per costruzione.
AF=FC per costruzione.
AF̂B=CF̂E perchè opposti al vertice (PROP. I,15).

Per la PROP. I,4 essi sono uguali, in particolare risulta BÂF=FĈE.

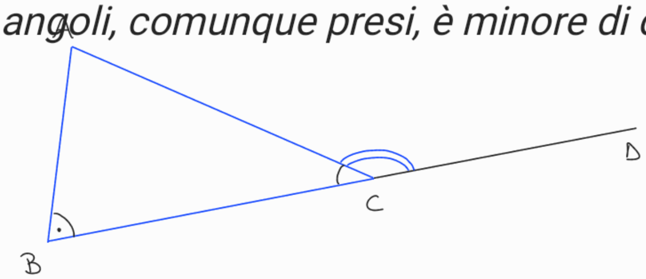
Ma $A\hat{C}D>F\hat{C}E$, quindi $A\hat{C}D>B\hat{A}F$ => $A\hat{C}D>B\hat{A}C$.
Allo stesso modo si dimostra che $A\hat{C}D>A\hat{B}C$:
Si prolunghi AC dalla parte di C individuando un punto G.
Si divida BC in due parti uguali in L (PROP. I,10), si congiunga A con L, e si prolunghi AL fino al punto H in modo che AL=LH (PROP. I,3).
Si congiunga H con C.



Si considerino ALB e LHC:
AL=LH per costruzione.
BL=LC per costruzione .
$A\hat{L}B=C\hat{L}H$ perchè opposti al vertice (PROP. I,15).

Per la PROP. I,4 essi sono uguali, in particolare risulta $A\hat{B}L=L\hat{C}H$.
Ma $B\hat{C}G>L\hat{C}H$, quindi $B\hat{C}G>A\hat{B}L$ => $B\hat{C}G>A\hat{B}C$.
Essendo $B\hat{C}G=A\hat{C}D$ perché opposti al vertice (PROP. I,15), si ottiene $A\hat{C}D>A\hat{B}C$.
Allo stesso modo si ha anche $B\hat{C}G>A\hat{B}C$ e $B\hat{C}G>B\hat{A}C$.

17. *"In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti".*



Sia ABC un triangolo qualunque.
Si prolunghi BC fino al punto D.
Si ha $A\hat{C}D>A\hat{B}C$ (PROP. I,16).

Sommando ad ambo i membri $A\hat{C}B$ si ha $A\hat{C}D+A\hat{C}B>A\hat{B}C+A\hat{C}B$.
Poichè $A\hat{C}D+A\hat{C}B=2R$, sarà $2R>A\hat{B}C+A\hat{C}B$.
Analogamente si dimostra che $2R>B\hat{A}C+A\hat{C}B$ e $2R>C\hat{A}B+A\hat{B}C$.

18. *"In ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore".*

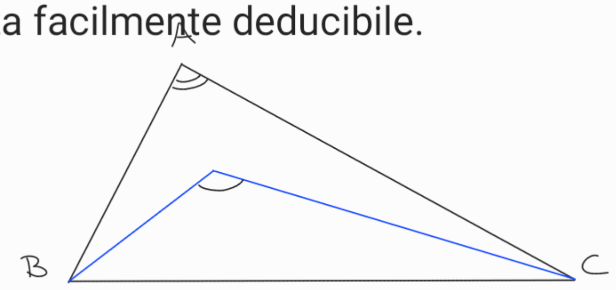
19. *"In ogni triangolo, ad angolo maggiore è opposto lato maggiore".*

20. *"In ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente".*

Questa proposizione ha un significato più generale: la linea retta rappresenta il percorso minimo tra due punti (Archimede considererà poi tutte le curve).
Proclo scrive che secondo gli epicurei questo teorema è talmente evidente che può comprenderlo anche un asino.
Euclide non aggiunge la proprietà che in ogni triangolo un lato è maggiore della

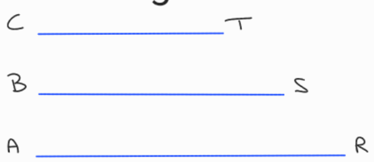
differenza degli altri due perchè èuna conseguenza facilmente deducibile.

21. *"Se su uno dei lati di un triangolo, a partire dagli estremi, si costruiscono due rette che si incontrino internamente al triangolo stesso, le rette così costruite, sommate assieme, saranno [complessivamente] minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma verranno a comprendere un angolo maggiore".*

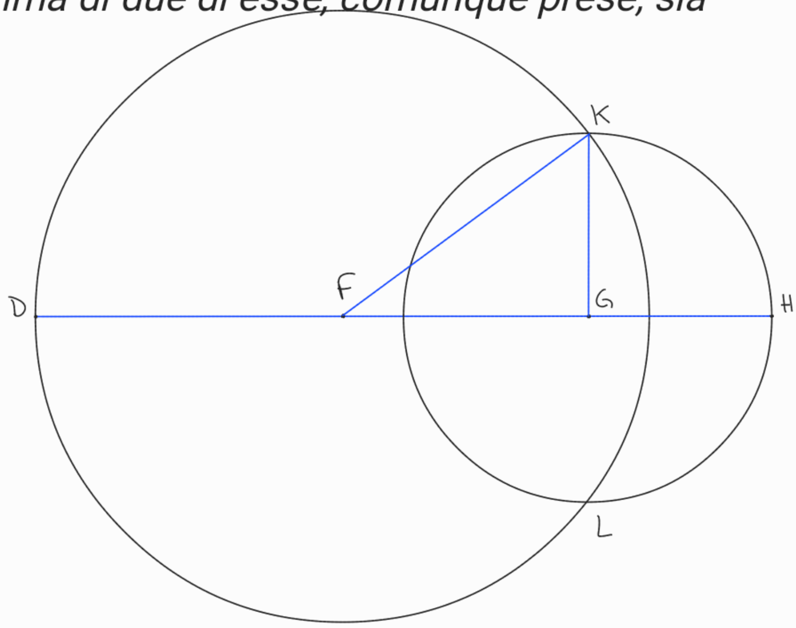


22. *"Con tre rette uguali a tre rette date* (naturalmente non consecutive), *costruire un triangolo: occorre dunque che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente* (PROP. I,20) *".*

Siano AR, BS e CT tre segmenti tali che:



AR+BS>CT
AR+CT>BS
BS+CT>AR



Su una retta si considerino i segmenti DF=AR, FG=BS e GH=CT (PROP. I,3).

Si tracci la circonferenza di centro F e raggio FD.
Si tracci la circonferenza di centro G e raggio GH.
Si unisca uno dei due punti di intersezione K ed L, ad esempio K, di intersezione delle circonferenze con F e con G.

FD=FK perchè raggi della stessa circonferenza di centro F e raggio FD.
FD=AR, quindi FK=AR.
GH=GK perchè raggi della stessa circonferenza di centro G e raggio GH.
GH=CT, quindi GK=CT.
FG=BS per costruzione.
Il triangolo FKG così costruito è il triangolo cercato.

Nella PROP. I,1 Euclide costruisce un triangolo in particolare, quello equilatero, nella PROP. I,22 ha generalizzato la costruzione di un triangolo qualsiasi.

23. *"Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo uguale ad un angolo rettilineo dato".*

La costruzione dell'angolo consiste nella costruzione del triangolo (PROP. I,22).
24. *"Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base".*

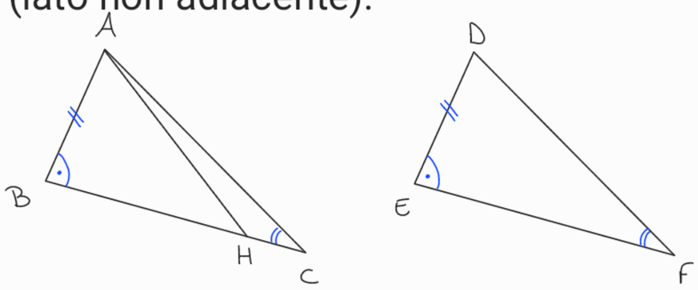
25. *"Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno la base maggiore della base, avranno anche l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente".*

Le due PROP. I,24 e I,25 sono inverse.

26. *"Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli e un lato uguale a un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto a uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente".*

Oggi è il II CRITERIO DI CONGRUENZA.
La differenza è che Euclide considera separatamente i casi in cui il lato è o meno adiacente ai due angoli congruenti.

Dimostriamo la 2° parte della proposizione (lato non adiacente):
Sappiamo che:
AB̂C=DÊF.
AĈB=DFE.
AB=DE.



Dobbiamo dimostrare che BC=EF.
Supponiamo per assurdo che sia BC≠EF (¬TESI).
Sia allora BC>EF.
Prendiamo su BC un punto H tale che BH=EF (PROP. I,3).
Congiungiamo A con H.

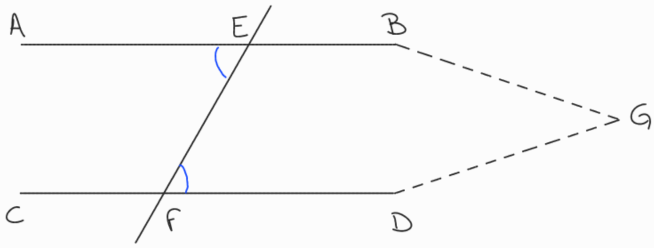
Consideriamo i triangoli ABH e DEF:
AB=DE per ipotesi.
BH=EF per costruzione.
AB̂H=DÊF per ipotesi.
Per la PROP. I,4 i due triangoli sono congruenti, e in particolare risulta BĤA=EF̂D.

Poichè EF̂D=BĈA per ipotesi, risulta BĤA=BĈA, il che è assurdo: contraddice la PROP. I,16 (l'angolo BĤA è esterno al triangolo HCA). Quindi deve essere BC=EF.

Poiché AB=DE e AB̂C=DÊF, i triangoli ABC e DEF sono congruenti per la PROP. I,4.
Queste prime 26 proposizioni non dipendono dal POST. V (che caratterizza la geometria euclidea), perciò valgono anche in altri ambiti della geometria al di fuori di quella euclidea: fanno quindi parte della geometria assoluta.
In particolare valgono nelle geometrie che si basano sulla negazione del POST. V: la geometria ellittica e la geometria delle curve.

Lez. 5 --- 14/03

27. *"Se una retta che venga a cadere su altre due rette forma gli angoli alterni uguali fra loro, allora le due rette saranno fra loro parallele".*

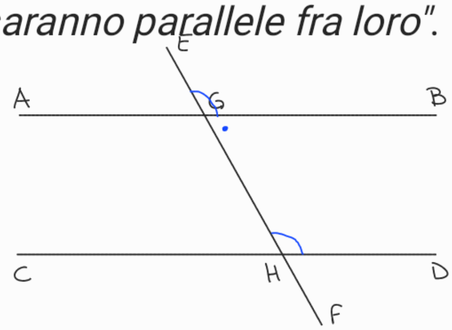


Siano AB e CD le due rette date.
Si tracci una retta trasversale tale da incontrare AB in E e CD in F, e tale che AÊF=EFD.
Dobbiamo dimostrare che AB//CD.

Se AB e CD non fossero parallele, prolungate si incontrerebbero dalla parte di B,D o dalla parte di A,C. Supponiamo che si incontrino dalla parte di B,D nel punto G.
Avremmo un triangolo EFG in cui l'angolo esterno AÊF è uguale all'angolo interno e opposto EFG, il che è assurdo in quanto contraddice la PROP. I,16.
Quindi AB e CD, prolungate, non potranno incontrarsi dalla parte di B,D.
Analogamente si dimostra che non possono incontrarsi dalla parte di A,C.
Allora AB//CD.

Questa è la prima proposizione in cui Euclide utilizza il termine parallele, tuttavia nella dimostrazione non si fa ricorso al POST. V => questa proposizione vale anche in ambito di geometrie non euclidee.

28. *"Se una retta che cada su due rette forma l'angolo esterno uguale all'angolo interno e opposto e che è dalla stessa parte, oppure gli angoli interni, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti, le rette saranno parallele fra loro".*



Siano AB e CD le due rette date.
Si tracci la trasversale EF che taglia la retta AB nel punto G e la retta CD nel punto H.
Sia EĜB=GĤD oppure BĜH+GĤD=2R.
Si deve dimostrare che AB//CD.

Sia EĜB=GĤD. Poiché anche EĜB=AĜH (PROP. I,15) risulta AĜH=GĤD (ASS. I) e,

poiché essi sono alterni, risulta AB//CD (PROP. I,27).
Sia invece $B\hat{G}H+G\hat{H}D=2R$.
Poiché anche $A\hat{G}H+B\hat{G}H=2R$ poiché adiacenti (PROP. I,13) risulta $A\hat{G}H+B\hat{G}H=B\hat{G}H+G\hat{H}D$; allora, se si sottrae da ambedue le somme $B\hat{G}H$, rimane $A\hat{G}H=G\hat{H}D$ (ASS. III) e, poiché essi sono alterni, risulta AB//CD (PROP. I,27).

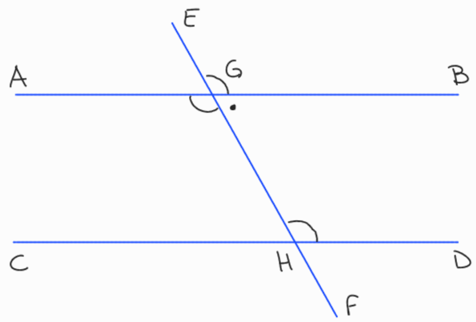
Anche questa proposizione non dipende dal POST. V, quindi non è specifica della geometria euclidea ma vale anche in altri contesti.

Queste due proposizioni I,27 e I,28 oggi sono conosciute come unico teorema, detto TEOREMA DIRETTO SULLE PARALLELE, che da alcune relazioni angolari (uguaglianza di angoli alterni, uguaglianza di angoli corrispondenti, angoli coniugati supplementari) deduce il parallelismo tra le rette.
Si dice anche che queste due proposizioni I,27 e I,28 fungono da CERNIERA tra la geometria assoluta e l'inizio della geometria vera e propria, perché contengono nel loro enunciato la parola "parallele".

29. *"Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, e l'angolo esterno uguale all'angolo interno e opposto, e angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti".*

Nota come TEOREMA INVERSO SULLE PARALLELE, questa proposizione è l'inversa delle PROP. I,27 e I,28.

Siano AB e CD due rette parallele tagliate dalla trasversale EF che incontra la retta AB nel punto G e la setta CD nel punto H.



Dobbiamo dimostrare che:
1) $A\hat{G}H=G\hat{H}D$.
2) $E\hat{G}B=G\hat{H}D$.
3) $B\hat{G}H+G\hat{H}D=2R$.

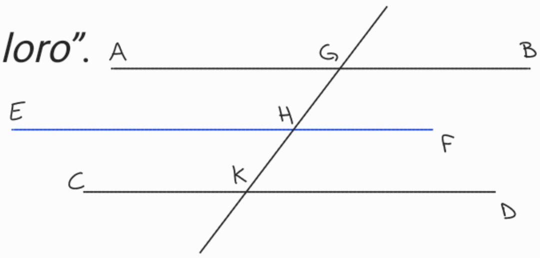
1) Per assurdo, supponiamo che sia $A\hat{G}H\neq G\hat{H}D$ e sia $A\hat{G}H > G\hat{H}D$.
Se aggiungiamo $B\hat{G}H$ risulta $A\hat{G}H+B\hat{G}H>G\hat{H}D+B\hat{G}H$. Essendo $A\hat{G}H+B\hat{G}H=2R$ (PROP. I,13), sarà $B\hat{G}H+G\hat{H}D<2R$. Allora le rette AB e CD dovrebbero incontrarsi (POST. V), il che è assurdo contro il fatto che AB//CD per ipotesi. Quindi deve essere $A\hat{G}H=G\hat{H}D$.

2) Essendo $A\hat{G}H=E\hat{G}B$ perché opposti al vertice (POST. I,15), risulta anche

$E\hat{G}B=G\hat{H}D$ (ASS. I).
3) Aggiungendo $B\hat{G}H$ otteniamo $E\hat{G}B+B\hat{G}H=G\hat{H}D+B\hat{G}H$ (ASS. II). Essendo $E\hat{G}B+B\hat{G}H=2R$ (PROP. I,13), risulta $G\hat{H}D+B\hat{G}H=2R$.

In qualunque dimostrazione di questo postulato si deve necessariamente far ricorso al POST. V (in maniera diretta) => Con la PROP. I,29 inizia la geometria euclidea vera e propria, cioè la geometria che si fonda sul POST. V (cioè le cui dimostrazioni ne dipendono sempre, direttamente o indirettamente).

30. *"Rette parallele a una stessa sono parallele tra loro".*



Siano AB, CD e EF tali che AB//EF e CD//EF.
Dobbiamo dimostrare che AB//CD.

Si tracci una trasversale e siano G, H, K i punti
di intersezione rispettivamente con le rette AB, EF e CD.
Poiché AB//EF per ipotesi, risulta $A\hat{G}H=G\hat{H}F$ perché alterni interni (PROP. I,29).
Poiché CD//EF per ipotesi, risulta $G\hat{H}F=G\hat{K}D$ perché corrispondenti (PROP. I,29).
Quindi anche $A\hat{G}K=G\hat{K}D$ e poiché essi sono alterni interni, deve essere AB//CD.

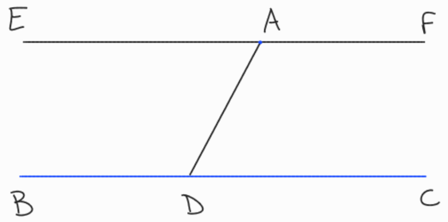
Questa proposizione dimostra la transitività del parallelismo, proprietà vera soltanto nell'ambito della geometria euclidea (perché la dimostrazione dipende dalla PROP. I,29, quindi indirettamente dal POST. V).

Una conseguenza di questa proposizione è l'unicità della parallela:
Sia r una retta qualsiasi e P un punto esterno ad essa.
Supponiamo che per P passi una retta s//r.
Consideriamo per assurdo che esista un'altra retta t//r e p€t.
s//r ; t//r => s//t (PROP. I,30) ASSURDO
perchè le due rette passano entrambe per P (sono incidenti).
Perciò la parallela ad una retta data passante per un suo punto esterno è unica; anche questa proprietà è vera solo all'interno della geometria euclidea, perché nella dimostrazione si serve della PROP. I,30.

31. *"Condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data".* (PROBLEMA).

Nonostante qui non si faccia uso del POST. V o delle PROP. I,29 o I,30, Euclide introduce ora questa proprietà perchè senza la conseguenza della PROP. I,30 sull'unicità della parallela la seguente costruzione non sarebbe stata univoca.

Sia BC la retta data e A un punto del piano esterno ad essa.
Si prenda su BC un punto qualunque D.
Si unisca A con D.
Sulla retta AD e con vertice in A
si costruisca $D\hat{A}E=ADC$ (PROP. I,23).
Si prolunghi EA fino al punto F.

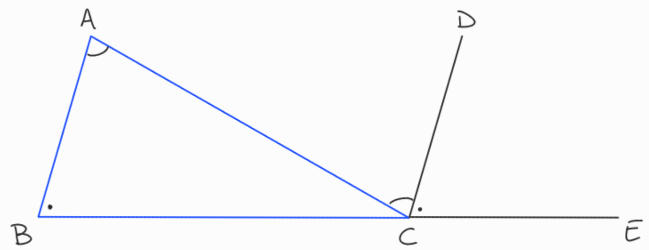


Poiché la retta AD, cadendo su BC ed EF forma gli angoli alterni interni $D\hat{A}E=ADC$, la retta EF è parallela a BC (PROP. I,27).

A differenza delle proposizioni in cui Euclide insegna a costruire la perpendicolare ad una retta data, in cui distingue due costruzioni, una nel caso in cui il punto è esterno alla retta data (PROP. I,12) e una nel caso in cui il punto appartiene alla retta data (PROP. I,11), per la costruzione della parallela ad una retta data enuncia una sola proposizione (PROP. I,31), nel cui enunciato non specifica se il punto appartiene o meno alla retta, perché per Euclide due rette parallele devono essere distinte tra di loro e non possono coincidere, per cui il punto non può appartenere alla retta data. Da questo segue che per Euclide la relazione di parallelismo non è una relazione di equivalenza, perché valgono simmetria e transitività ma non vale la proprietà riflessiva, per cui una retta è parallela a se stessa; oggi invece è una relazione di equivalenza poiché questa possibilità viene assunta, infatti nella definizione di rette parallele si include che due rette sono parallele tra loro se coincidono.

Lez. 6 --- 15/03

32. *"In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni e opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti".*



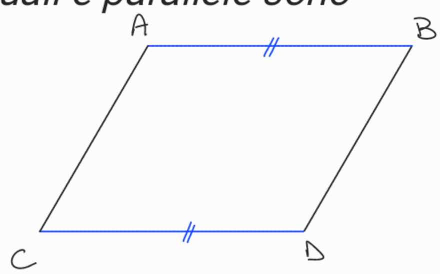
Consideriamo un triangolo qualsiasi ABC.
Prolunghiamo uno dei lati, ad esempio BC, fino ad un certo punto E.
Tracciamo la parallela ad AB passante per C (PROP. I,31).
Allora $B\hat{A}C=A\hat{C}D$ perché alterni interni rispetto alle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC (PROP. I,29).
$A\hat{B}C=D\hat{C}E$ perché corrispondenti rispetto alle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BE (PROP. I,29).
Allora $A\hat{C}D+D\hat{C}E=B\hat{A}C+A\hat{B}C$, ma $A\hat{C}D+B\hat{C}E=A\hat{C}E$.

Allora $A\hat{C}E=B\hat{A}C+A\hat{B}C$.
Sommando l'angolo interno del triangolo si ottiene $A\hat{C}E+A\hat{C}B=B\hat{A}C+A\hat{B}C+A\hat{C}B$.
Essendo $A\hat{C}E+A\hat{C}B=2R$, otteniamo $B\hat{A}C+A\hat{B}C+A\hat{C}B=2R$.

Questa proposizione porta a due risultati, uno è che l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti, e l'altro ne è conseguenza, cioè che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti (180°).

Questa proposizione contiene come casi particolari le proposizioni PROP. I,16 (infatti se l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti, sarà certamente maggiore di uno solo di essi) e PROP. I,17 (infatti se la somma dei tre angoli è uguale a due retti certamente la somma di soli due di essi sarà minore di due retti), le quali allora possono essere pensate come conseguenza della PROP. I,32.
La scelta di Euclide dell'ordine in cui presentare queste proposizioni è dovuta al fatto che presentando le proposizioni I,16 e I,17 come conseguenza della I,32 porterebbe a pensare che, dato che la I,32 dipende dal POST. V allora anche le PROP. I,16 e I,17 che ne sono conseguenza valgono solo nell'ambito della geometria euclidea, il che è falso poiché le PROP. I,16 e I,17 si possono dimostrare anche senza ricorrere al POST. V. Tuttavia precisando questo punto, non è sbagliato invertire la presentazione di tali proposizioni.

33. *"Rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele sono anch'esse uguali e parallele".*



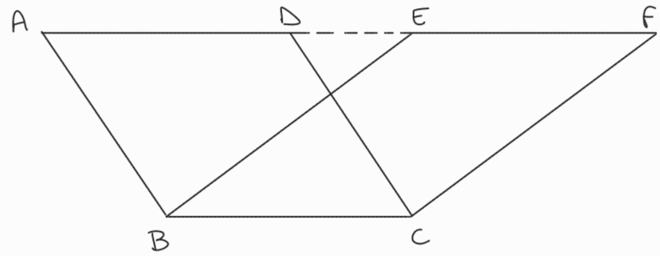
Siano AB e CD due segmenti (rette) uguali e paralleli. Congiungendone gli estremi si ottengono due segmenti AC e BD e si dimostra che sono anch'essi uguali e paralleli.

Tra le sue definizioni, Euclide non ha dato la definizione di parallelogramma, ma non è necessario perché in questa proposizione mostra come costruire un parallelogramma a partire da due rette parallele e come riconoscere se un quadrilatero è un parallelogramma (lo è quando i lati opposti sono paralleli).

34. *"I parallelogrammi hanno lati e angoli opposti uguali fra loro e sono divisi dalla diagonale in due parti uguali".*

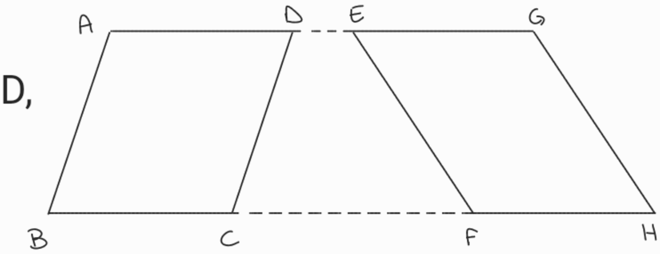
Qui dimostra le proprietà di un parallelogramma: ha i lati opposti uguali tra di loro e gli angoli opposti uguali tra di loro, e tracciando una qualsiasi diagonale i due

triangoli che si vengono a formare sono congruenti e portano altre proprietà.
35. *"Parallelogrammi che siano sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro".*



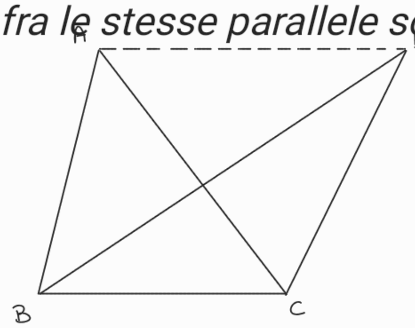
Supponiamo di avere un segmento BC,
su cui costruiamo un parallelogramma ABCD.
Se un secondo parallelogramma BCEF è
costruito sulla stessa base BC e contenuto
nelle stesse parallele, ottenute dai prolungamenti
ad esempio dei lati AD e BC, allora i due parallelogrammi sono equivalenti ("uguali" per Euclide), cioè hanno la stessa area.

36. *"Parallelogrammi che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro".*



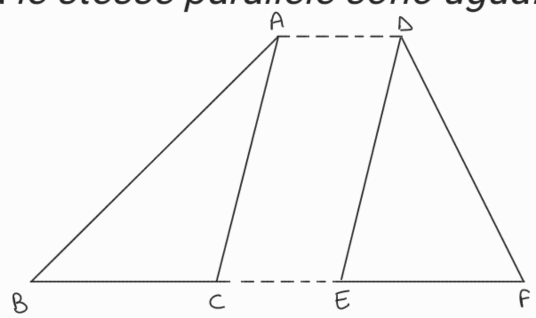
Supponiamo di avere un parallelogramma ABCD,
contenuto tra le parallele ottenute dai
prolungamenti dei lati AD e BC.
Sia FH un segmento congruente a BC
e posto sul suo prolungamento, se costruiamo
un parallelogramma EFHG tale che anche EG è posto sul prolungamento di AD, allora i due parallelogrammi sono equivalenti ("uguali" per Euclide), cioè hanno la stessa area.

37. *"Triangoli che siano posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro".*



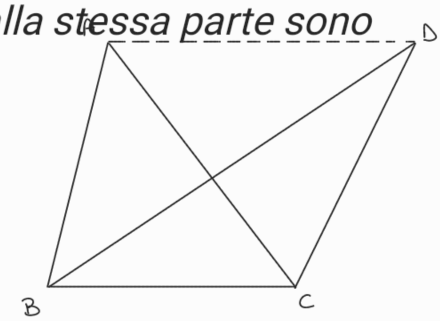
Supponiamo di avere due rette parallele.
Su di esse prendiamo un segmento BC.
Su BC costruiamo il triangolo ABC e il
triangolo BCD. Essi avranno la stessa area.

38. *"Triangoli che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro".*



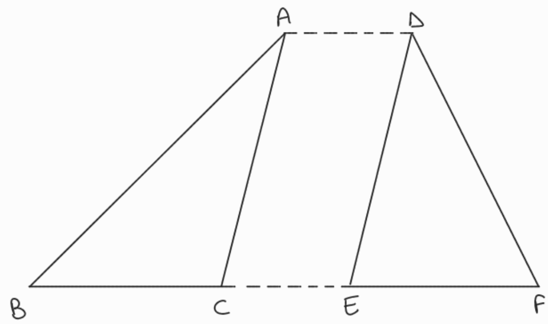
Supponiamo di avere due rette parallele.
Tra di esse costruiamo un triangolo ABC.
Sia DEF un altro triangolo posto tra le stesse
parallele e tale che la base EF sia congruente
alla base BC di ABC, allora i due triangoli sono

equivalenti ("uguali" per Euclide), cioè hanno la stessa area.
39. *"Triangoli uguali che siano posti sulla stessa base e dalla stessa parte sono anche fra le stesse parallele".*



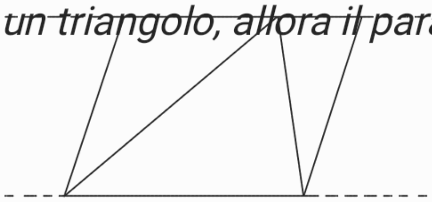
Siano ABC e BCD due triangoli tali da avere la stessa area e la base BC in comune. Allora essi sono racchiusi tra due rette fra di loro parallele. È la proposizione inversa della PROP. I,37.

40. *"Triangoli uguali che siano posti su basi uguali e dalla stessa parte sono anche compresi fra le stesse parallele".*



Siano ABC e DEF due triangoli tali che le loro basi BC e EF siano congruenti e che i vertici siano dalla stessa parte. Se i due triangoli hanno la stessa area allora sono compresi tra rette tra di loro parallele.

41. *"Se un parallelogrammo ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele da cui è compreso un triangolo, allora il parallelogrammo è il doppio del triangolo".*



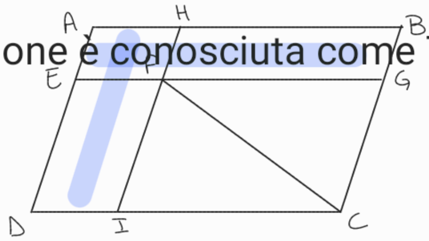
42. *"Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale a un triangolo dato".* (PROBLEMA)

Consideriamo un angolo rettilineo dato e un triangolo ABC. Questa proposizione insegna a costruire un parallelogramma che sia equivalente al triangolo ABC nell'angolo rettilineo dato, cioè in maniera tale che uno degli angoli del parallelogrammo sia congruente all'angolo dato.

43. *"In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi [posti] intorno alla diagonale sono uguali tra loro".*

Sia ABCD un parallelogrammo dato. Tracciamo una delle diagonali, ad esempio AC, e tracciamo le parallele ai due lati del parallelogrammo che si incontrino in un punto qualsiasi della diagonale tracciata. Si vengono così a costruire quattro parallelogrammi, due dei quali non sono attraversati dalla diagonale e sono detti COMPLEMENTI del parallelogramma, tra di loro equivalenti.

Questa proposizione è conosciuta come TEOREMA DELLO GNOMONE.



Lo gnomone indica la somma di uno dei due parallelogrammi posti intorno alla diagonale e dei due complementi. Nel caso in cui si parta da un rettangolo, che è un caso particolare di parallelogrammo, allora lo gnomone ha la forma di una squadra, cioè se realizzato materialmente diventa uno strumento adatto a tracciare angoli retti.

44. *"Applicare a una retta data in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale a un triangolo dato"*. (PROBLEMA)

Questa proposizione oggi viene generalizzata: "Applicare a un segmento dato ("retta" per Euclide) un'area data", o anche "Costruire su un segmento dato un poligono equivalente ad un altro poligono dato".

Il problema di costruire su un segmento dato un'area uguale (o maggiore o minore) ad un'area data, è noto come PROBLEMA DI APPLICAZIONE DELLE AREE, di cui esistono diversi tipi:
- Applicazione parabolica: quando l'area da applicare è uguale all'area data (es. costruire su un segmento dato un quadrato equivalente a un triangolo dato).
- Applicazione iperbolica: quando l'area da applicare è maggiore dell'area data.
- Applicazione ellittica: quando l'area da applicare è minore di quella data.

I nomi associati alle applicazioni derivano dal greco: "parabolè" significava "uguaglianza", "yperbolè" significava "essere più grande di", ed "ellipsis" o "ellipseos" (dal latino) significava "essere mancante di".
Infatti il primo significato dei termini parabola, ellisse e iperbole non deriva dalla sezione conica ma dal confronto delle aree; successivamente Apollonio costruirà le coniche secando un cono con un piano con diverse inclinazioni e darà alle sezioni corrispondenti tali nomi notando le proprietà che si verificano (infatti Apollonio arriva ad ottenere l'equazione metrica della parabola eguagliando due aree, nel caso dell'ellisse nota che un'area è minore di un'area data e così anche per l'iperbole).

45. *"Costruire un parallelogrammo uguale a una figura rettilinea data in un dato angolo rettilineo"*.

Con questa proposizione generalizza la PROP. I, 44.
46. *"Descrivere un quadrato su una retta data".*

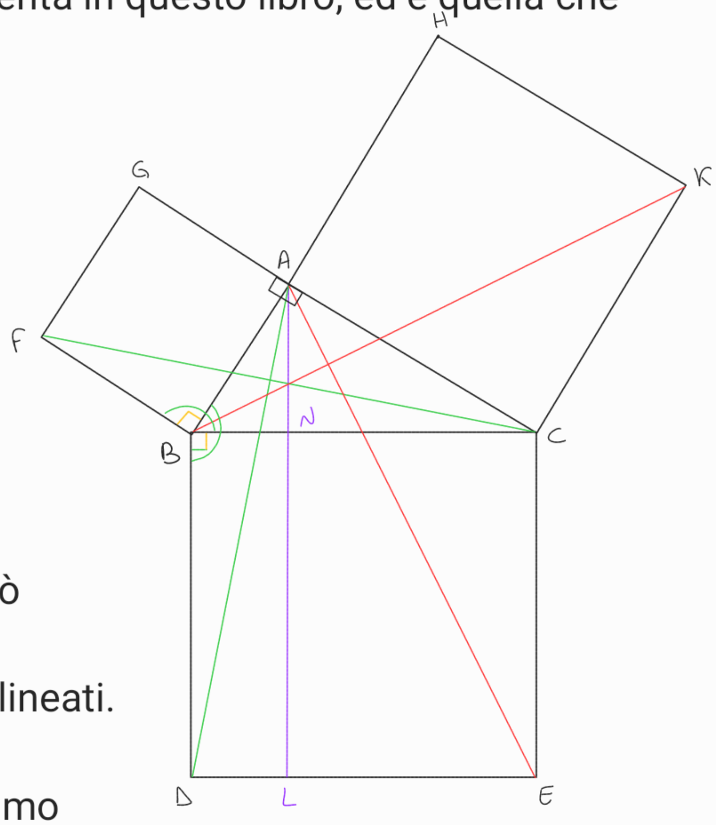
In questa proposizione più che fare riferimento all'applicazione delle aree, Euclide insegna a costruire un quadrato a partire da un segmento dato.

47. *"Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto".*

Questo è quello che conosciamo come TEOREMA DI PITAGORA.

Questo risultato era probabilmente noto prima di Euclide ma anche prima di Pitagora, e lo si evince da antichi disegni e incisioni che mostravano un triangolo rettangolo con i lati di misura 3, 4 e 5. Non sappiamo effettivamente chi sia arrivato per primo a questa soluzione ma sappiamo che la prima dimostrazione che ci è pervenuta è quella che Euclide presenta in questo libro, ed è quella che ancora oggi si ripropone.

Sia ABC un triangolo rettangolo in $B\hat{A}C$.
Si costruisca su BC un quadrato BCDE, su AB un quadrato ABFG e su AC il quadrato ACKH (PROP. I, 46).
Dal vertice A si tracci la retta AL parallela a BD (PROP. I, 31) che interseca BC nel punto N.
Congiungiamo ora A con D e F con C.
Gli angoli $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}G$ sono angoli retti, perciò sono angoli adiacenti la cui somma è 180°, e questo implica che i punti C, A e G sono allineati.
Osserviamo che gli angoli $D\hat{B}C$ e $F\hat{B}A$ sono anch'essi retti. Se a $D\hat{B}C=F\hat{B}A=1R$ aggiungiamo l'angolo $A\hat{B}C$ otteniamo $D\hat{B}C+A\hat{B}C=F\hat{B}A+A\hat{B}C$.
Allora $D\hat{B}A=F\hat{B}C$.



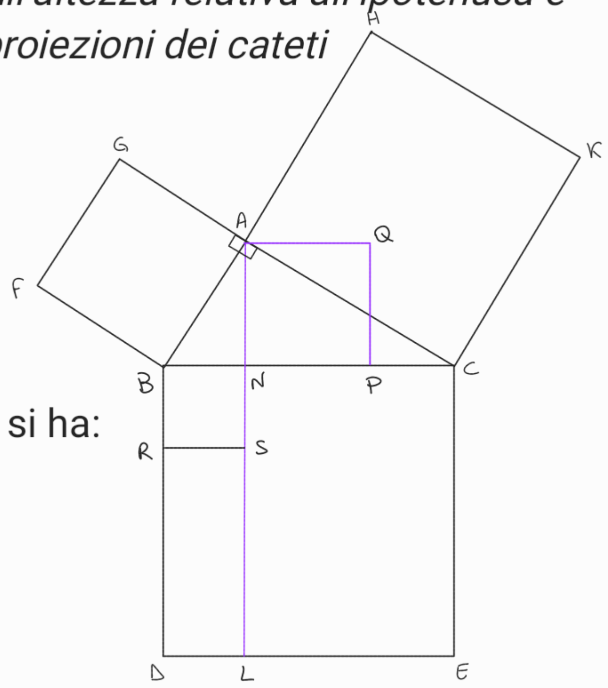
Consideriamo i triangoli ABD e FBC:
DB=BC perché lati dello stesso quadrato costruito su BC
FB=BA perché lati dello stesso quadrato costruito su AB
$D\hat{B}A=F\hat{B}C$ per costruzione.
Per la PROP. I, 4 (I criterio di congruenza) si ha che i triangoli ABD e FBC sono congruenti, in particolare AD=FC.

Il rettangolo BDLN e il triangolo ABD sono contenuti tra le stesse parallele (BD e AL) e hanno la stessa base BD, perciò l'area del rettangolo sarà il doppio dell'area del triangolo (PROP. I,41): r(BDLN)=2tr(ABD).
Il quadrato GFBA e il triangolo FBC hanno la stessa base FB e sono contenuti tra le stesse parallele (FB e GC), perciò l'area del quadrato sarà il doppio dell'area del triangolo (PROP. I,41): q(GFBA)=2 tr(FBC).
Ma abbiamo dimostrato che i due triangoli ABD e FBC sono uguali tra di loro e sappiamo per le nozioni comuni che doppi di cose uguali sono uguali tra di loro, perciò: r(BDLN)=q(GFBA).
Allo stesso modo, unendo A con E e B con K, si ripete la stessa dimostrazione e risulta che r(CNLE)=q(HACK).
Perciò possiamo concludere che q(BDEC)=q(GFBA)+q(HACK).

Lez. 7 --- 21/03

Il I TEOREMA DI EUCLIDE non è mai stato enunciato ma costituisce una parte della dimostrazione della PROP. I,47.
$AB^2 = BN \cdot BD$
"Il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensione l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa".

II TEOREMA DI EUCLIDE
"In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha i dati uguali alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa".



Su BD prendiamo un punto R tale che BR=BN.
Su AN costruiamo il quadrato ANPQ (PROP. I,46).
Per la PROP. I,47 applicata al triangolo ABN si ha:
q(ABFG)=q(BNSR)+q(ANPQ).
Per il I TEO di EUCLIDE applicato al triangolo ABC, si ha:
q(ABFG)=r(BNLD)
q(ANPQ)+q(BNSR)=r(BNLD)
q(ANPQ)+q(BNSR)=q(BNSR)+r(RSLD)
Dall'ASS. III segue che q(ANPQ)=r(RSLD).

Anche il II TEO non è mai stato enunciato da Euclide.
I e II TEO si basano sull'equivalenza e sulla PROP. I,47, ma possono considerarsi conseguenze della proporzionalità (in particolare il II TEO -> PROP. I,6 e I,13).

48. *"Se in un triangolo il quadrato di uno dei due lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso tra i due rimanenti due lati del triangolo è retto".*

La PROP. I,48 è l'inversa della I,47.

QUADRILATERI LOGICI

Prop. Diretta	-----	Prop. Inversa
$A \Rightarrow B$		$B \Rightarrow A$
|		|
Prop. Contraria	-----	Prop. contronominale
$\neg A \Rightarrow \neg B$		$\neg B \Rightarrow \neg A$

Le proposizioni sono LOGICAMENTE EQUIVALENTI se implicano le medesime conseguenze.

Esempio 1

PROP I,4 PROP I,8 PROP I,24 PROP I,25

PROP. I,4
HP:
AB=A'B'
BC=B'C'
$A\hat{B}C$=$A'\hat{B}'C'$

TS:
AC=A'C'
A(ABC)=A(A'B'C')
$B\hat{C}A$=$B'\hat{C}'A'$
$B\hat{A}C$=$B'\hat{A}'C'$

PROP. I,8
HP:
AB=A'B'
AC=A'C'
BC=B'C'

TS:
$A\hat{B}C$=$A'\hat{B}'C'$

PROP. I,24
HP:
AB=A'B'
BC=B'C'
$A\hat{B}C$>$A'\hat{B}'C'$

TS:
AC>A'C'

PROP. I,25
HP:
AB=A'B'
BC=B'C'
AC>A'C'

TS:
$A\hat{B}C$>$A'\hat{B}'C'$

Mediante una serie di adattamenti avremo:

PROP. I,4
HP: non considero le ipotesi comuni
$A\hat{B}C$=$A'\hat{B}'C'$

TS: non considero le altre tesi

PROP. I,8
HP: non considero le ipotesi comuni
AC=A'C'

TS:
$A\hat{B}C$=$A'\hat{B}'C'$

$AC=A'C'$

PROP. I,24

HP: non considero le ipotesi comuni

$A\hat{B}C \neq A'\hat{B}'C'$

Modifico > con ≠

TS:

$AC \neq A'C'$

PROP. I,25

HP: non considero le ipotesi comuni

$AC \neq A'C'$

Modifico > con ≠

TS:

$A\hat{B}C \neq A'\hat{B}'C'$

In questo modo possiamo costruire un quadrato logico:

PROP. I,4 (diretta)	---	PROP. I,8 (inversa)
$A\hat{B}C=A'\hat{B}'C' \Rightarrow AC=A'C'$		$AC=A'C' \Rightarrow A\hat{B}C=A'\hat{B}'C'$
|		|
PROP. I,24 (contraria)	---	PROP. I,25 (contronominale)
$A\hat{B}C \neq A'\hat{B}'C' \Rightarrow AC \neq A'C'$		$AC \neq A'C' \Rightarrow A\hat{B}C \neq A'\hat{B}'C'$

Esempio 2

PROP I,5 PROP I,6 PROP I,18 PROP I,19

PROP. I,5

HP:

$AB=BC$

TS:

$B\hat{A}C=B\hat{C}A$

$C\hat{A}D=E\hat{C}A$

PROP. I,6

HP:

$B\hat{A}C=B\hat{C}A$

TS:

$AB=BC$

PROP. I,18

HP:

$AB>BC$

TS:

$B\hat{A}C>B\hat{C}A$

PROP. I,19

HP:

$B\hat{A}C>B\hat{C}A$

TS:

$AB>BC$

Analogamente si avrà:

PROP. I,5 (diretta)	---	PROP. I,6 (inversa)
$AB=BC \Rightarrow B\hat{A}C=B\hat{C}A$		$B\hat{A}C=B\hat{C}A \Rightarrow AB=BC$
|		|
PROP. I,18 (contraria)	---	PROP. I,19 (contronominale)
$AB \neq BC \Rightarrow B\hat{A}C \neq B\hat{C}A$		$B\hat{A}C \neq B\hat{C}A \Rightarrow AB \neq BC$

Esempio 3

POST. V   PROP I,17   PROP I,27-28   PROP I,29

	PROP. I,17	PROP. I,27-28	PROP. I,29
POST. V	HP:	HP:	HP:
HP:	$r \cap s \neq \emptyset$	$\alpha=\delta$	$r \cap s=\emptyset$
$\alpha+\beta<2R$	$r \cap t \neq \emptyset$	$\gamma=\beta$	
	$s \cap t \neq \emptyset$	$\varepsilon=\rho$	TS:
TS:		$\sigma=\vartheta$	$\alpha=\delta$
$r \cap s \neq \emptyset$	TS:	$\sigma=\delta$	$\gamma=\beta$
	$\alpha+\beta<2R$	$\gamma=\rho$	$\varepsilon=\rho$
	$\alpha+\gamma<2R$	$\alpha=\vartheta$	$\sigma=\vartheta$
	$\gamma+\beta<2R$	$\varepsilon=\beta$	$\sigma=\delta$
		$\alpha+\beta=2R$	$\gamma=\rho$
		$\gamma+\delta=2R$	$\alpha=\vartheta$
		$\varepsilon+\vartheta=2R$	$\varepsilon=\beta$
		$\sigma+\rho=2R$	$\alpha+\beta=2R$
			$\gamma+\delta=2R$
		TS:	$\varepsilon+\vartheta=2R$
		$r \cap s=\emptyset$	$\sigma+\rho=2R$

In questo caso si ha:

POST. V (diretta)	---	PROP. I,17 (inversa)
$\alpha+\beta<2R \Rightarrow r \cap s \neq \emptyset$		$r \cap s \neq \emptyset \Rightarrow \alpha+\beta<2R$
|		|
PROP. I,28-29 (contraria)	---	PROP. I,29 (contronominale)
$\alpha+\beta=2R \Rightarrow r \cap s=\emptyset$		$r \cap s=\emptyset \Rightarrow \alpha+\beta=2R$

Lez. 8 --- 22/03

IL PROBLEMA DELLE PARALLELE

Perché le parallele cominciano a costituire un problema?
Alcuni dei motivi principali sono:

- Nella DEF. I,23 di rette parallele e nel POST. V Euclide usa il termine "infinito", che non era e non poteva essere una realtà matematica, perché l'infinito in atto era riservato al divino.

- Il POST. V non è evidente come i primi quattro, per cui si è discusso se questa proposizione potesse essere accettato in quanto postulato, che è inteso come qualcosa di intuitivo.

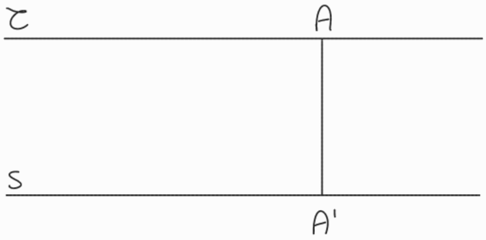
- Euclide non si serve del POST. V fino alla PROP. I,28 , e questo ha fatto pensare che lo stesso Euclide non fosse convinto che questo fosse effettivamente un postulato e che quindi abbia evitato il più possibile di utilizzarlo; in realtà Euclide lo usa solo nel momento in cui risulta necessario, così come ha fatto con tutti gli altri elementi, introdotti solo all'occorrenza.

- La PROP. I,17 sembrerebbe l'inversa del POST. V (es. 3), tuttavia questo è falso perché se il POST. V fosse l'inverso della PROP. I,17 che è un teorema, allora dovrebbe essere anch'esso un teorema, e quindi essere dimostrabile, tuttavia nel 1800 ne è stata dimostrata l'indimostrabilità (risolvendo di fatto il problema delle parallele, anche se in realtà anche oggi si continua a cercarne una soluzione).

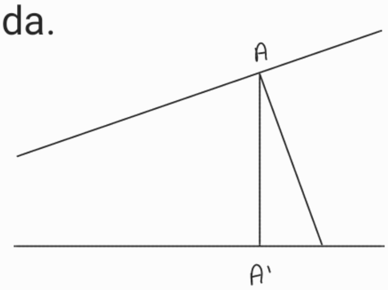
Come si è cercato di risolvere il problema?
Alcuni hanno cercato di escludere i termini che si riferissero all'infinito o all'illimitato, riformulando gli enunciati, pensando che bastasse a risolvere il problema.

Uno di questi fu Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679) che scrisse un commento al primo libro di Euclide, ricordato come "Euclides restitutus" (1659), letteralmente "Euclide restituito", perché Borelli ha come scopo quello di riscoprire ciò che Euclide aveva fatto e trasmesso per restituirlo alla sua versione originale, perché nel corso del tempo nei diversi commenti agli "Elementi" di Euclide erano state date delle interpretazioni diverse in alcuni punti.

Qui ridefinisce le rette parallele:
"Due rette sono parallele quando hanno la stessa perpendicolare passante per punti corrispondenti".

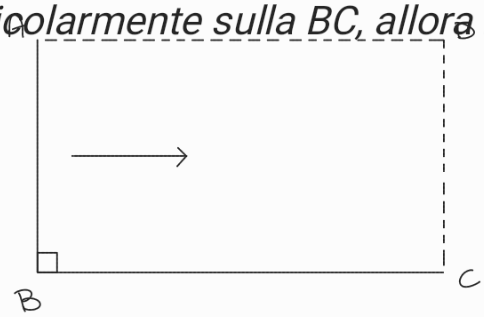


Consideriamo due rette r ed s.
Su r ci sono tanti punti quanti ve ne sono su s.
Allora possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca tra le due rette in modo tale che a un punto della prima corrisponda un punto della seconda.



Possiamo, dunque, considerare coppie di punti corrispondenti (A, A'), con A∈r e A'∈s.
Tracciamo la perpendicolare a r passante per A e la perpendicolare a s passante per A'.
Se le rette perpendicolari coincidono allora r e s sono parallele.

Questa definizione è accettabile dal punto di vista matematico, ma non è considerabile una definizione euclidea, perché qui la condizione di parallelismo dipende dalla perpendicolarità, mentre Euclide separa e distingue i due concetti.
Borelli riscrive anche il POST. V:
"Se una retta AB, tracciata perpendicolarmente sulla retta BC nel suo punto estremo B, si muove di moto trasversale nello stesso piano fino a C, e in questo modo non vacilla, ma si mantiene sempre perpendicolarmente sulla BC, allora il flusso del punto A descrive una retta".



Questo enunciato ha origine tra i matematici arabi, che prima dei matematici latini e greci hanno utilizzato all'interno della geometria il concetto di movimento, che fino ad allora era proprio della "filosofia naturale", cioè quella che una volta che è stato introdotto il linguaggio matematico per descrivere i fenomeni (nel 1700 circa) diventerà la disciplina autonoma che oggi conosciamo come "fisica".

Non è presente il termine infinito, ma di fatto la retta BC può essere prolungata e AB può "scorrere" anche all'infinito.
Secondo Borelli questo enunciato è più chiaro perché il concetto di parallelismo si basa sulla distanza tra le due rette, quindi ricorre al concetto di equidistanza.
Ridefinendo le parallele ed enunciando un nuovo postulato, Borelli ritiene di evitare il problema delle parallele.

Altri matematici hanno creduto che il POST. V fosse realmente un postulato ma che semplicemente non fosse evidente come gli altri; hanno perciò tentato di sostituire la formulazione del POST. V con una logicamente equivalente (cioè le cui conseguenze sono le stesse) che fosse più intuitiva.

Alcuni tentativi:
1. *"Data una retta e un punto fuori di essa, per quel punto passa una e una sola retta parallela a quella data"*. John Playfar (1700).
È così che il POST. V viene enunciato oggi, e nonostante sembri diverso da quello di Euclide, in realtà sono equivalenti.

2. *"Non esistono rette asintotiche".*
Cioè non esistono rette che si avvicinano sempre di più senza toccarsi, perciò tali rette si devono intersecare. La condizione in cui le rette si avvicinano è che gli angoli che si formano dalla stessa parte rispetto alla trasversale sommati siano

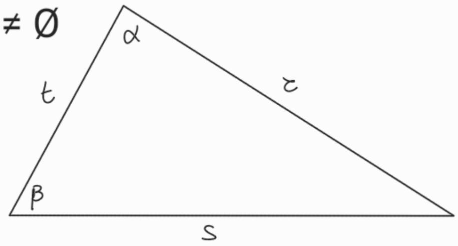
minori di due retti, perciò questo enunciato è equivalente a quello di Euclide.
3. *"Esistono rette equidistanti"*. Posidonio.

4. *"Dato un triangolo, ne esiste uno simile a quello dato e grande a piacere".* John Wallis (1600). Quest'ultimo enunciato è vero solo all'interno della geometria euclidea, perché dipende proprio dal POST. V di Euclide.

Un'altra strada seguita per tentare di risolvere il problema delle parallele è stata considerare il POST. V e la PROP. I,27 come uno l'inverso dell'altra.
Nonostante in simboli possa sembrare vero, in realtà non lo è:

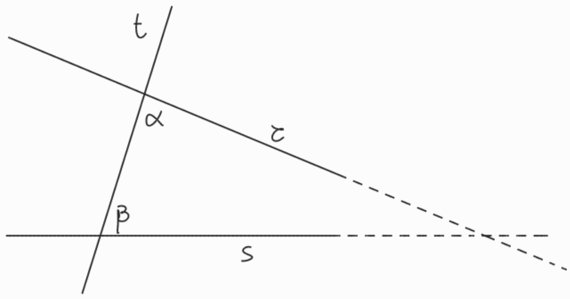
PROP. I,27

HP:	TS:
$r \cap s \neq \emptyset$	$\alpha+\beta < 2R$
$r \cap t \neq \emptyset$	$\alpha+\gamma < 2R$
$s \cap t \neq \emptyset$	$\beta+\gamma < 2R$



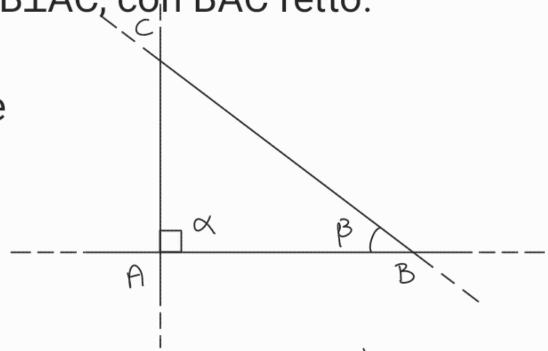
POST. V

HP:	TS:
$\alpha+\beta < 2R$	$r \cap s \neq \emptyset$



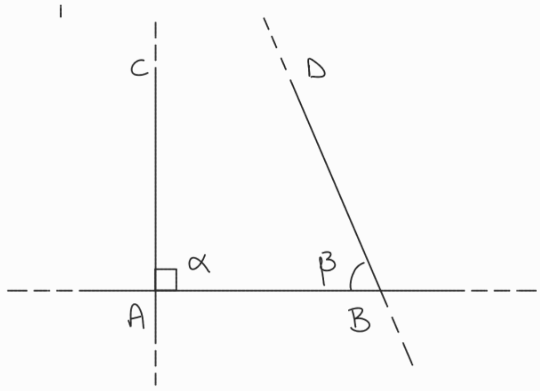
Una sostanziale differenza è che nel POST. V nonostante si ottenga un triangolo non viene specificata la posizione del vertice formato da $r \cap s$, ed esse potrebbero essere prolungate all'infinito. Nella DEF. I,14 Euclide afferma che *"Figura è ciò che è compreso da uno o più termini"*, per cui la seconda non è una figura in senso euclideo, mentre la prima sì, perciò si parla di due enti geometrici differenti (altrimenti si dovrebbe intendere una figura come una parte di piano illimitata).

Supponiamo di avere due rette AB e AC tali che $AB \perp AC$, con $B\hat{A}C$ retto.



Si tracci da un punto qualsiasi di AB una retta che intersechi AC in un punto che indicheremo con D. Possiamo dire che $\beta < 1R$ per la PROP. I,17 ed è possibile dimostrarlo poiché è un teorema.

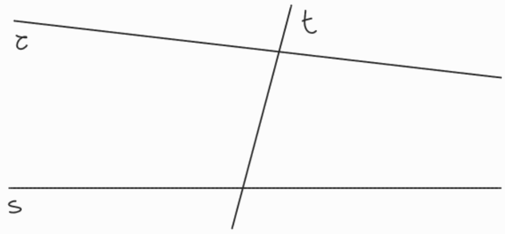
Si tracci invece una retta passante per un punto qualsiasi di AB tale che β sia acuto. Possiamo dire che le due rette, se prolungate, si incontreranno ricorrendo al POST. V, ma non riusciamo a dimostrarlo all'interno della geometria euclidea (in altre geometrie le rette potrebbero essere asintotiche).



Considerando il metodo di Euclide, se il POST. V fosse un teorema dovrebbe essere posto tra le PROP. I,28 e I,29. Considerando la negazione del POST. V, che se questo fosse un teorema sarebbe un teorema esso stesso, anch'esso dovrebbe essere posto tra le PROP. I,28 e I,29, ma si dovrebbe ottenere un sistema contraddittorio, cosa che non accade.
È questa la base delle geometrie non euclidee, ed è stata proprio la coerenza delle geometrie non euclidee a provare che il POST. V non è dimostrabile.

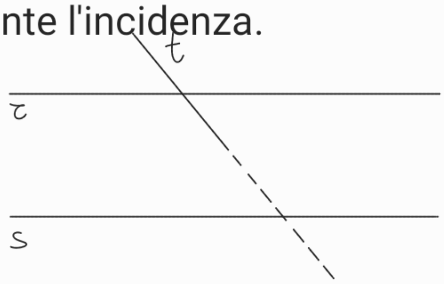
PROCLO (V sec d.C.)

Nei suoi "Commenti" ha riportato dimostrazioni precedenti a quelle di Euclide e le prime dimostrazioni del POST V. Ne fornisce una propria, preceduta da due lemmi:

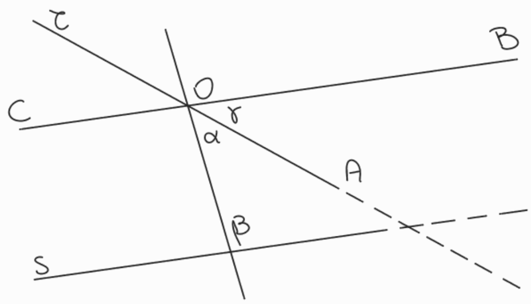


LEMMA I) *"Date due rette r e s tagliate da una trasversale t, se a destra di t la distanza tra le due rette diminuisce sempre di più e a sinistra di t la distanza tra le due rette aumenta sempre di più, allora a destra di t le rette sono convergenti, mentre a sinistra di t sono divergenti".*

La convergenza tuttavia non implica necessariamente l'incidenza.



LEMMA II) *"Date due rette r e s parallele, se si ha una retta trasversale t che interseca la prima retta e la si prolunga all'infinito, essa intersecherà anche la seconda retta".*



Dim. POST. V di PROCLO

HP:	TS:
$\alpha+\beta < 2R$	$r \cap s \neq \emptyset$

Se $\alpha+\beta<2R$, esiste un angolo rettilineo γ t.c. $\alpha+\beta+\gamma=2R$, cioè t.c. $\gamma=2R-(\alpha+\beta)$.
Costruiamo $A\hat{O}B=\gamma$ (PROP. I,23) => CB//s.

Prolunghiamo il lato OB dell'angolo dalla parte di O fino al punto C.
Per il LEMMA I, r e s convergono dalla parte di α e β e divergono dall'altra parte.
Per il LEMMA II applicato alle rette CB e s, la trasversale r che interseca CB deve

intersecare anche s. Quindi r e s devono intersecarsi.
Nelle condizioni del LEMMA II, tuttavia, il fatto che r prolungata intersechi s è garantito dall'unicità della parallela, conseguenza della PROP. I,30, dimostrata tramite la PROP. I,29, la cui dimostrazione dipende dal POST. V. Per cui per dimostrare il POST. V Proclo utilizza il POST. V => contraddizione logica.

Lez. 9 --- 28/03
Cristoforo Clavio (1537-1612)

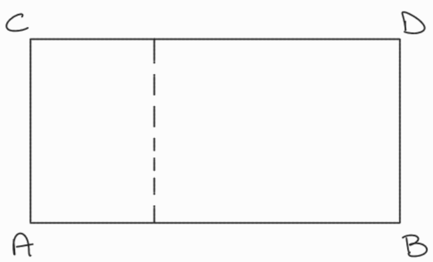
Dalla sua opera, "Commento agli Elementi di Euclide", sono state pubblicate diverse edizioni, di cui consideriamo quelle del 1574 e del 1589.
Clavio ritiene che Euclide sia nel giusto, e che quindi il POST. V sia effettivamente un postulato, e per dimostrarlo suppone che non sia un postulato e ne cerca una dimostrazione (opera una FINIZIONE EPISTEMOLOGICA).

Nelle opere antiche, uno "SCHOLIUM" o "SCHOLION" o "SCHOLIO", letteralmente uno "scoglio", era un ostacolo, cioè dei paragrafi in cui venivano affrontati dei problemi discussi in quel periodo. Nell'edizione del 1574, Clavio inserisce uno "scoglio" tra le PROP. I,28 e I,29, nel quale afferma che il POST. V (che riporta come ASSIOMA XIII) deve essere considerato un teorema, facendo sua una finzione epistemologica.
Ne propone la dimostrazione di Proclo, affermando che fosse ottima.

Nell'edizione del 1589, ancora tra le PROP. I,28 e I,29 inserisce un altro scoglio, nel quale propone lo stesso problema. Qui afferma però che la dimostrazione di Proclo non è più valida, perché la convergenza implica l'incidenza.

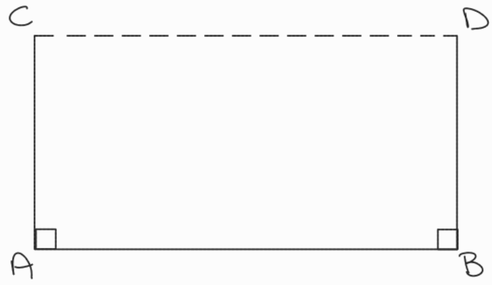
Infatti, tra il 1574 e il 1589 si discusse molto su quello che è passato alla storia come "meraviglioso problema", cioè un problema di asintoticità, che riguarda il fatto che un'iperbole e un suo asintoto si avvicinano sempre di più senza toccarsi. Fino a quel punto la convergenza tra due enti ne implicava sempre l'incidenza, ma con il "meraviglioso problema" si afferma che in alcuni enti geometrici questo non è sempre vero, ma è un'implicazione che si può applicare soltanto alle rette e soltanto se ci si basa sul POST. V (infatti nella geometria euclidea è valida, ma nelle geometrie non euclidee esistono rette asintotiche).

Dim. POST. V di CLAVIO (premesse)



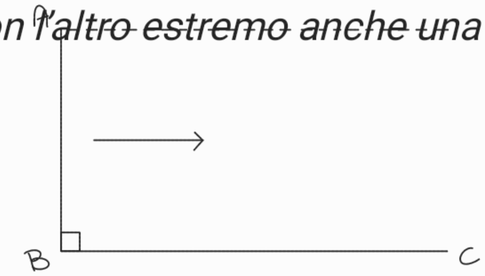
LEMMA I) *"La linea, i cui punti hanno la stessa distanza da una retta che è nello*

stesso piano, è una retta".
Sia AB la retta data. Siano C e D due punti tali da avere la stessa distanza da AB, cioè AC=DB. Allora si dimostra che la linea CD è anch'essa una retta.
Questo è vero nella geometria euclidea, ma nella geometria non euclidea non sempre si ha una retta.



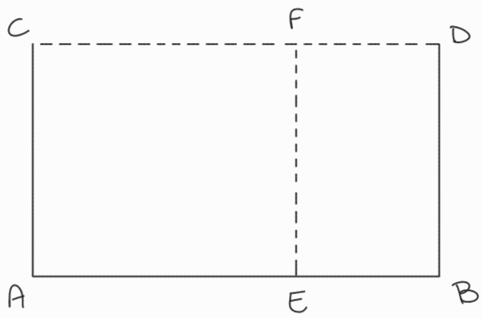
Il quadrilatero ABCD così costruito (che nella geometria euclidea sarebbe un rettangolo) viene chiamato QUADRILATERO BIRETTANGOLO, e significa che ci sono due angoli retti ma nulla possiamo dire sugli altri due angoli.

LEMMA II) *"Se una retta di muove trasversalmente su un'altra retta, formando con un suo estremo angoli sempre retti, descrive con l'altro estremo anche una retta".*



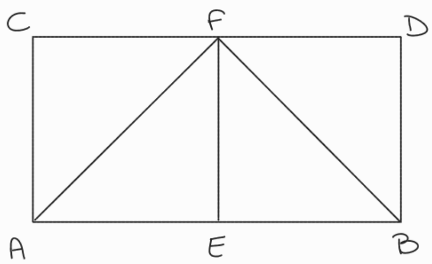
Anche in questo caso, il riferimento al movimento porta a pensare che questi lemmi provengano dalla tradizione araba.
In realtà non è chiaro come sia avvenuto il passaggio di conoscenze e risultati di matematici arabi al mondo latino.

LEMMA III) *"Se a una retta si erigono due rette perpendicolari tra loro uguali, i cui estremi sono congiunti da una retta, la perpendicolare, tracciata da qualunque punto di questa retta alla prima, sarà uguale alle due perpendicolari".*



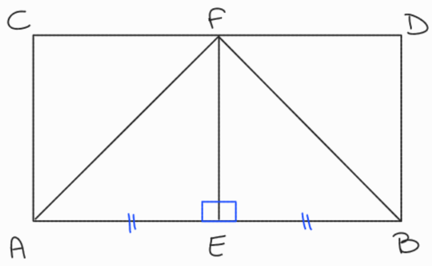
Sia AB la retta data.
Tracciamo AC e DB tali che AC⊥AB e DB⊥AB e AC=DB.
Allora CD è una retta (LEMMA I).
Da F, punto qualsiasi di CD, tracciamo la perpendicolare FE.
Si dimostra che FE=AC=DB.

LEMMA IV) *"Se a una retta si erigono due perpendicolari tra loro uguali, i cui estremi sono congiunti da una retta, questa formerà un angolo retto con entrambe le perpendicolari".*



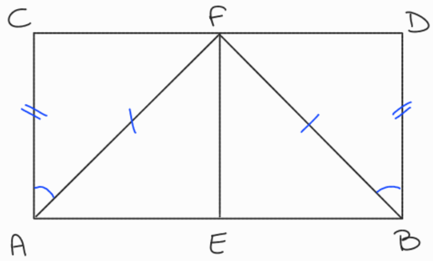
1° DIM.
Dividiamo AB in due parti uguali nel punto E.
Tracciamo EF⊥AB.

Congiungiamo F con A e con B.



Consideriamo i triangoli AEF e BEF:
AE=EB per costruzione.
EF in comune.
$A\hat{E}F=B\hat{E}F$ per costruzione.
Per il I criterio di congruenza (PROP. I,4)
i triangoli AEF e BEF sono congruenti, e in particolare:
AF=FB
$F\hat{A}E=F\hat{B}E$
$A\hat{F}E=B\hat{F}E$

Sappiamo che $C\hat{A}E=D\hat{B}E=90°$ per ipotesi, e $F\hat{A}E=F\hat{B}E$ per quanto appena dimostrato. Allora $C\hat{A}E-F\hat{A}E=D\hat{B}E-F\hat{B}E$ (ASS. III), cioè $C\hat{A}F=D\hat{B}F$.



Consideriamo i triangoli ACF e BDF:
CA=BD per ipotesi.
AF=BF come appena dimostrato.
$C\hat{A}F=D\hat{B}F$ perché complementari di angoli uguali.
Per il I criterio di congruenza (PROP. I,4) i due triangoli sono congruenti e in particolare risulta:
CF=FD
$A\hat{C}F=B\hat{D}F$
$A\hat{F}C=B\hat{F}D$

Sommando $C\hat{F}A+A\hat{F}E=D\hat{F}B+B\hat{F}E$, cioè $C\hat{F}E=D\hat{F}E=90°$.
Per il LEMMA III abbiamo EF=AC=BD.
Poiché EF⊥AE e AC⊥AE, deve essere $A\hat{C}F=C\hat{F}E$, ed essendo $C\hat{F}E=90°$, deve essere $A\hat{C}F=90°$. Allo stesso modo dimostriamo che $B\hat{D}F=90°$.

TEO) *“Se su due rette incide una terza retta, che della stessa parte forma con la prima un angolo retto e con la seconda uno acuto, la distanza di quelle due rette sarà sempre minore della parte dove si trova l’angolo acuto e sempre maggiore della parte dove si trova l’angolo ottuso”.*

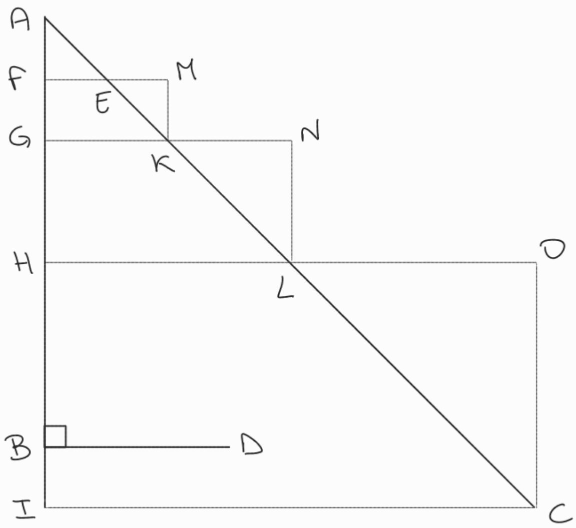
2° DIM.
Se $A\hat{C}D$ e $B\hat{D}C$ non fossero retti, allora dovrebbero essere o acuti o ottusi.
È la prima volta che vengono considerate ipotesi diverse da quella degli angoli retti per gli angoli $A\hat{C}D$ e $B\hat{D}C$.

Se $A\hat{C}D<90°$ allora le rette AB e CD convergono dalla parte di B e D per il TEO

precedente. Quindi dovrebbe risultare AC>BD, il che è ASSURDO (HP: AC=BD).
Se $A\hat{C}D>90°$ allora le rette AB e CD divergono dalla parte di B e D per il TEO precedente. Allora dovrebbe risultare BD>AC, il che è ASSURDO (HP: AC=BD).

Una dimostrazione simile si ha se $B\hat{D}C>90°$ o $B\hat{D}C<90°$.
Allora deve essere $A\hat{C}D=B\hat{D}C=90°$.

Dim. POST V di CLAVIO
Distingue due parti: un primo caso in cui considera i due angoli che la trasversale forma con le due rette uno acuto e l'altro retto (così che la somma sia <2R) e poi generalizza il risultato nel caso in cui anche l'altro angolo non sia retto, ma sempre nelle ipotesi del POST. V (somma dei due angoli <2R).



Siano AB e AC due rette incidenti e BD la trasversale ad AB.
Possiamo dimostrare che AC e BD prolungate si intersecano.
$A\hat{B}D+B\hat{A}C<2R$

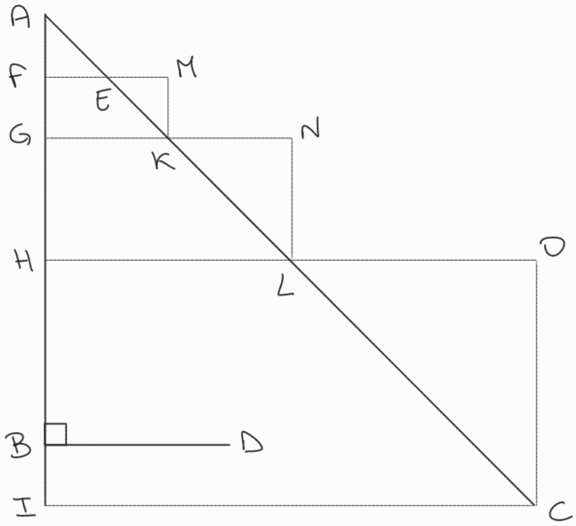
1° PARTE:
Supponiamo $A\hat{B}D=90°$
Prendiamo su AC un punto E e tracciamo EF⊥AB.
Prendiamo FG=AF, GH=AG, HI=AH.
Ripetendo la costruzione fino ad oltrepassare il punto B, cioè AI>AB.

È questo il POSTULATO DELLA CONTINUITÀ così come Euclide poteva esprimerlo a suo tempo (noto all'ora come POST. DI EUDOSSO-ARCHIMEDE): *"Date due grandezze disuguali, è sempre possibile trovare un multiplo della minore* (nel nostro caso AF) *che superi la maggiore* (AB)*".*

Lo scopo di Clavio era di dimostrare il POST. V utilizzando solo le proposizioni precedenti alla PROP. I,28, ma già a questo punto tradisce il suo scopo con questo postulato, successivo alla PROP. I,28.

Su AC prendiamo EK=AE, KL=AK, LC=AC in modo da avere tante parti su AC quante sono quelle costruite su AB.
Congiungiamo K con G, L con H, C con I.
Prolunghiamo EF, GK, HL in modo tale che risulti EM=EF, KN=GK, LO=HL.

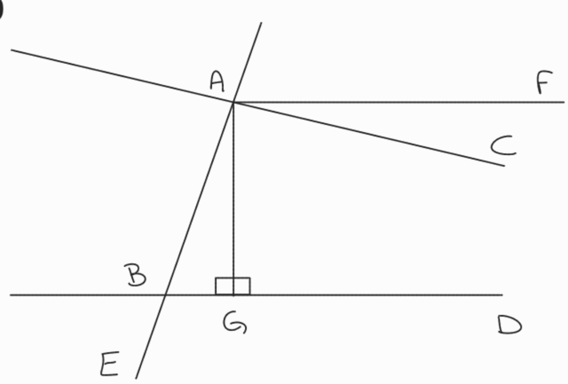
Uniamo M con K, N con L, O con C.
Consideriamo i triangoli AFE e EMK:
AE=EK per costruzione.
FE=EM per costruzione.
AÊF=KÊM perché opposti al vertice (PROP. I,15).
Allora i due triangoli sono congruenti (P̂ROP. I,4),
in particolare sarà: MK=AF , KM̂E=AFE=90°.
Ma FG=AF per costruzione, allora FG=MK.
Essendo FG⊥FM, MK⊥FM e FG=MK,
per il LEMMA IV deve essere AĜK=90°.



Consideriamo i triangoli KNL e AGK:
KL=AK per costruzione.
KN=GK per costruzione.
LN̂K=AĜK=90°.
Ma AG=GH, quindi GH=NL.
Essendo GH⊥GN, NL⊥GN e CH=NL, per il LEMMA IV risulta AĤL=90°.

Ripete il ragionamento fino al triangolo che ottiene oltrepassando B, nel nostro caso fino a considerare i triangoli COL e AHL.
Si procede allo stesso modo per gli altri triangoli.
Per ipotesi AB̂D=1R, quindi IC//BD (POST. I,28) perciò BD se prolungata intersecherà AC al di sopra di C.

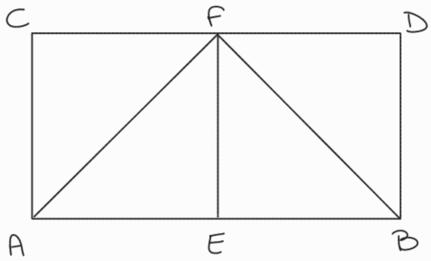
Lez. 10 --- 29/03
2° PARTE:
Consideriamo due rette tagliate da una trasversale.
Gli angoli formati sono tali che AB̂D+BÂC<2R.
Vogliamo dimostrare che le rette AC e BD prolungate si intersecano.



Per costruzione AB̂D+DB̂E=2R.
=> AB̂D+BÂC<AB̂D+DB̂E
=> BÂC<DB̂E (ASS. III).

Costruiamo BÂF=DB̂E.
Allora AF//BD.
Sia AG⊥BD.
Con AF//BD deve essere GÂF=1R.
Allora AG, incidente in AC e BD, forma l’angolo AĜD retto e l’angolo GÂC acuto,

per cui AC e BD concorrono dalla parte di C,D come dimostrato prima.
Il problema sorge nella dimostrazione del LEMMA IV:



CÂE+AÊF=180° => AC//EF (PROP. I,28)
AC//EF => AĈF+CFE=180° perché coniugati interni
abbimo dimostrato che CFE=90° => AĈF=90°
=> AĈF=90° <=> AC//EF (PROP. I,29)!!

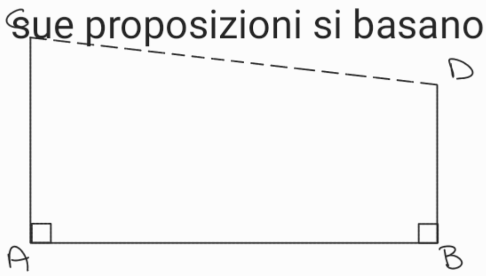
Per affermare che AC//EF basta la PROP. I,28; l'errore consiste nel considerare come conseguenze del parallelismo le relazioni angolari di congruenza tra angoli alterni e corrispondenti e di angoli coniugati supplementari.

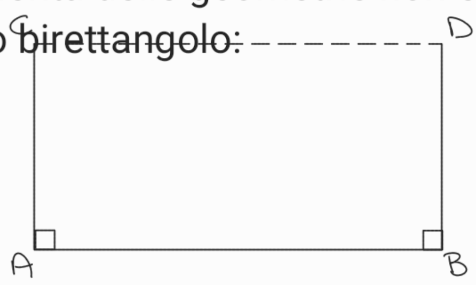
Quindi, sia nella dimostrazione di Proclo sia in quella di Clavio si ha un errore da un punto di vista logico, cioè per voler dimostrare qualcosa si utilizza quel qualcosa stesso, tuttavia il ricorso al POST. V è diverso.
La dimostrazione di Proclo non è accettabile perché nel LEMMA II il fatto che t debba intersecare s è vero soltanto nel caso in cui la parallela condotta ad una retta data da un punto esterno è unica (PROP. I,30). Nella dimostrazione di Clavio si ricorre invece alla PROP. I,29, in un modo apparentemente più diretto.

Girolamo Saccheri (1667 – 1733)

Nel 1697 pubblica "Logica demonstrativa", la logica che serve alle dimostrazioni.
Nel 1733 pubblica la sua opera principale, "Euclides ab omni naevo vindicatus" (letteralmente "Euclide liberato da ogni neo"); nella prima parte tratta delle parallele, nella seconda delle proposizioni.

Saccheri credeva che il POST. V fosse vero e che fosse effettivamente un postulato. Per dimostrarlo procede in maniera diversa dai suoi predecessori: assumendo per ipotesi la falsità del POST. V, vuole dimostrarne la veridicità trovando delle contraddizioni nelle conseguenze della negazione del postulato.
Le contraddizioni che Saccheri trova tuttavia si scopriranno false, per cui involontariamente inizia a costruire le fondamenta delle geometrie non euclidee.
Le sue proposizioni si basano sul quadrilatero birettangolo:

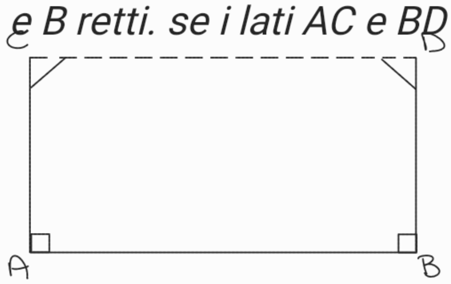




AC=BD => Quadrilatero birettangolo isoscele.

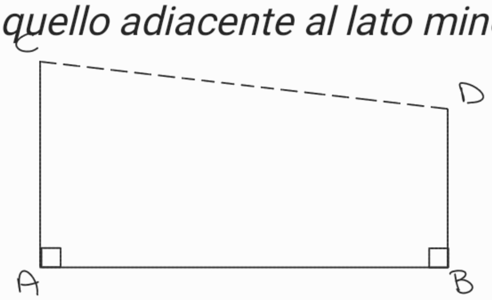
PROPOSIZIONI DI SACCHERI:

I. *"Sia ABCD un quadrilatero con gli angoli consecutivi A e B retti. se i lati AC e BD sono uguali, anche l'angolo C è uguale all'angolo D".*



$$\left.\begin{array}{l} AC \perp AB \\ BD \perp AB \\ AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{D}$$

II. *"Sia ABCD un quadrilatero con gli angoli consecutivi A e B retti. se i lati AC e BD sono disuguali, dei due angoli C e D è maggiore quello adiacente al lato minore ed è minore quello adiacente al lato maggiore".*



$$\left.\begin{array}{l} AC \perp AB \\ BD \perp AB \\ AC > BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} < \hat{D}$$

III. *"Se due rette uguali AC e BD insistono perpendicolarmente su una qualsiasi retta AB, la congiungente CD sarà, rispetto ad AB, uguale o minore o maggiore secondo che gli angoli della stessa CD siano retti o ottusi o acuti".*

Fino a questo momento non si erano mai fatte ipotesi diverse da quella dell'angolo retto sugli angoli in C e D; seppure Clavio prima di lui aveva affermato che se quegli angoli non fossero retti allora dovrebbero essere o acuti o ottusi, tuttavia la sua considerazione si limita ad ipotesi non sviluppate.

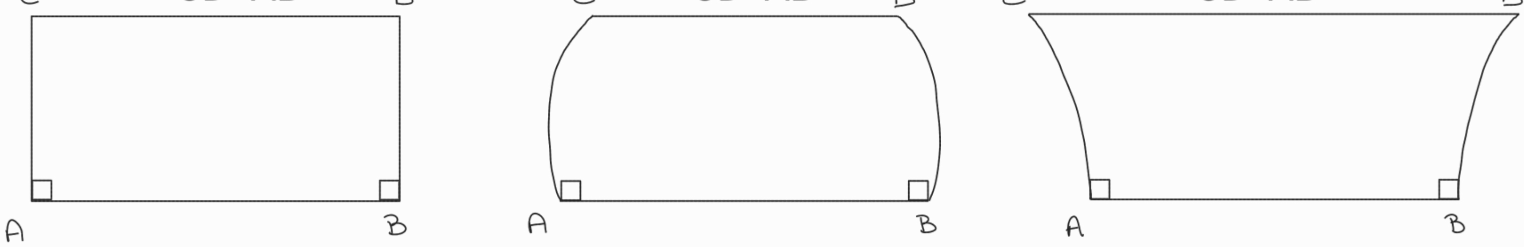
Saccheri parte dalle ipotesi che gli angoli in C e D siano acuti o ottusi, cercando (e credendo di aver trovato) una contraddizione al fine di dimostrare che l'unica possibilità è che quei due angoli siano retti, e quindi che l'unica geometria possibile è quella euclidea.

Tuttavia di fatto da queste dimostrazioni partiranno quelle che ancora sono chiamate:
1. IPOTESI DELL'ANGOLO RETTO (fondamenta della geometria EUCLIDEA);
2. IPOTESI DELL'ANGOLO ACUTO (base della geometria IPERBOLICA);
3. IPOTESI DELL'ANGOLO OTTUSO (base della geometria ELLITTICA).

Sul nostro foglio, si possono raffigurare le figure corrispondenti alle ipotesi degli angoli acuti e ottusi solo con una forzatura immaginativa, poiché quello su cui

disegniamo è un piano euclideo.
Ipotesi comuni: AC⊥AB ; DB⊥AB ; AC=BD

$\hat{C}=\hat{D}=1R$	$\hat{C}=\hat{D}>1R$	$\hat{C}=\hat{D}<1R$
=> CD=AB	=> CD<AB	=> CD>AB



Assumendo ipotesi diverse da quelle dell'angolo retto, di fatto nega il POST. V. Questa considerazione era già stata fatta, ma la novità di Saccheri sta nel considerare logicamente equivalenti tali ipotesi.

Si è dimostrato che le superfici sulle quali si può disegnare un quadrilatero birettangolo partendo dalle ipotesi dell'angolo ottuso, quindi considerando gli angoli in C e D ottusi, sono le superfici a curvatura costante positiva, come ad esempio può essere una sfera; al contrario, le superfici sulle quali si può disegnare un quadrilatero birettangolo partendo dalle ipotesi dell'angolo acuto, quindi considerando gli angoli in C e D acuti, sono le superfici a curvatura costante negativa, come ad esempio le superfici a sella.

È possibile stabilire tale corrispondenza tra il piano ellittico e iperbolico e le superfici soltanto localmente, cioè considerando dei pezzi opportunamente scelti di superficie; se invece vengono considerate le superfici nella loro interezza questa corrispondenza viene meno.

V. *“Se l’ipotesi dell’angolo retto è vera anche solo in un caso, in ogni caso è sempre la sola vera”.*

VI. *“Se l’ipotesi dell’angolo ottuso è vera anche solo in un caso, in ogni caso è sempre la sola vera”.*

VII. *“Se l’ipotesi dell’angolo acuto è vera anche solo in un caso, in ogni caso è sempre la sola vera”.*

In queste proposizioni dimostra che in uno stesso contesto geometrico può valere solo una di quelle ipotesi, perciò nella geometria euclidea l’unica accettabile è l’ipotesi dell’angolo retto. Le tre ipotesi possono però coesistere in

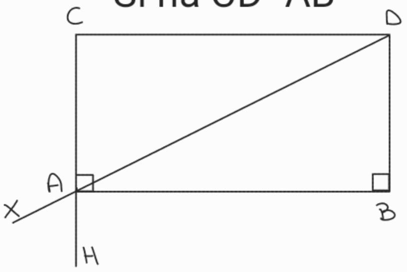
tre contesti diversi; si vengono così a creare tre “mondi geometrici”.
Questo porterà al problema filosofico della pluralità dei mondi: possono esistere mondi diversi dal nostro, basati su ipotesi diverse da quelle che conosciamo.

Si formeranno anche altre geometrie, come ad esempio la geometria proiettiva, che si fonda sulla geometria euclidea ma la amplia, ad esempio introducendo le parallele che si incontrano all'infinito.

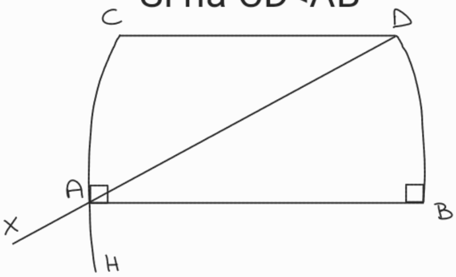
Lez. 11 --- 04/04

VIII. *“Dato un qualsiasi triangolo, rettangolo in B, si prolunghi DA fino al punto X e per A si conduca HAC perpendicolare ad AB in modo che il punto H stia dalla parte dell’angolo $X\hat{A}B$. Dico che l’angolo estremo $X\hat{A}H$ sarà uguale o minore o maggiore dell’interno e opposto ADB quando sia vera l’ipotesi dell’angolo retto o dell’angolo ottuso o dell’angolo acuto; e reciprocamente”.*

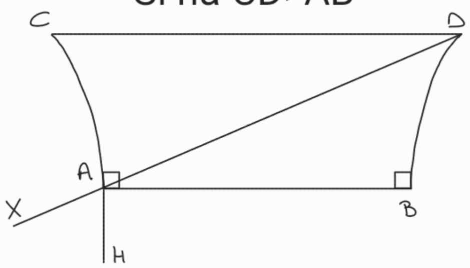
Hp angolo retto:
$X\hat{A}H=A\hat{D}B$
Si ha CD=AB



Hp angolo ottuso:
$X\hat{A}H<A\hat{D}B$
Si ha CD<AB



Hp angolo acuto:
$X\hat{A}H>A\hat{D}B$
Si ha CD>AB



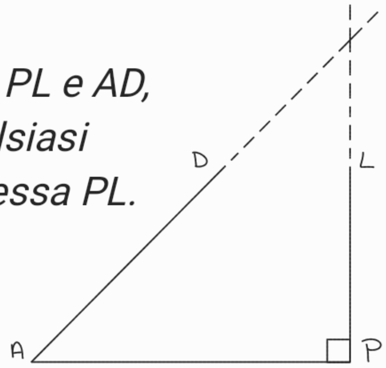
IX. *“In qualsiasi triangolo rettangolo, i residui due angoli acuti, sommati insieme, sono uguali a un angolo retto nell’ipotesi dell’angolo retto; nell’ipotesi dell’angolo ottuso maggiori di un angolo retto; minori invece nell’ipotesi dell’angolo acuto”.*

Da ora in poi possiamo dire che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti (180°) se ci troviamo nel contesto della geometria euclidea. Nella geometria che si basa sull’ipotesi dell’angolo acuto è minore di due retti, maggiore di due retti nel caso della geometria che si basa sull’ipotesi dell’angolo ottuso.

Saccheri si rende conto che nell’ammettere l’esistenza di ipotesi diverse da quella di Euclide non c’è alcuna contraddizione logica, il che ben diverso dal fatto che un’ipotesi possa condurre ad una contraddizione: le ipotesi diverse possono esistere, e in questo non c’è nulla di contradditorio, mentre ci può essere qualche contraddizione all’interno delle conseguenze che derivano da queste ipotesi.

Di fatto Saccheri cerca di dimostrare che l'unica ipotesi possibile è quella euclidea dimostrando che le altre due ipotesi portano a delle contraddizioni e quindi sono false (stesso modo di procedere di Archimede).

IPOTESI DELL'ANGOLO OTTUSO: ricerca di una contraddizione.

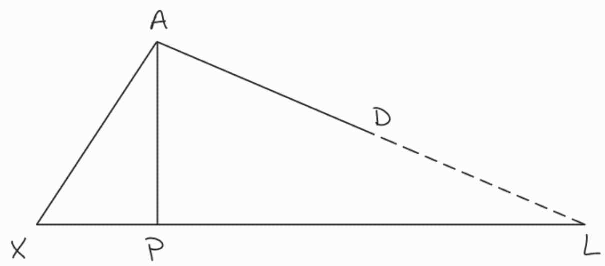


XI. *"Intersechi la retta AP, di qualsiasi lunghezza, due rette PL e AD, la prima formando un angolo retto in P, la seconda un qualsiasi angolo acuto in A, convergente dalla stessa parte della stessa PL. Dico che, nell'ipotesi dell'angolo retto, se si prolungano le rette AD e PL da quella parte in cui formano con la base AP angoli insieme minori di due retti, si intersecheranno in un punto a distanza finita o terminata".*

XII. *"Reciprocamente dico che, anche nell'ipotesi dell'angolo ottuso, la retta AD incontrerà la retta PL dalle medesime parti, e a distanza finita e determinata".*

Qui afferma che il POST. V di Euclide vale anche nell'ipotesi dell'angolo ottuso nel caso particolare in cui uno dei due angoli sia retto. Nell'ipotesi dell'angolo ottuso tuttavia il POST. I,2 di Euclide non vale, e non si può prolungare una retta all'infinito, perché si tratta di rette finite. Saccheri pensa di risolvere il problema aggiungendo alla sua PROP. XII il fatto che le due rette si incontrino "a distanza finita e determinata". In realtà non riesce a dimostrarlo, ma dimostra soltanto che esse si incontreranno; questo significa che potrebbero incontrarsi anche all'infinito, ma in questo caso non saremmo più nell'ambito della geometria che si basa sull'ipotesi dell'angolo ottuso, in cui le rette non sono infinite.

XIII. *"Se la retta XA, di qualsivoglia designata lunghezza, intersecando le due rette AD e XL, forma con esse, dalla stessa parte, angoli interni $X\hat{A}D$ e $A\hat{X}L$ con somma minore di due retti, dico che in entrambe le ipotesi, dell'angolo retto e dell'angolo ottuso, tali due rette (anche se nessuno di quegli angoli è retto) si incontreranno in un punto dalla parte di quegli angoli e a distanza finita e determinata".*



Generalizza le PROP. XI e XII, affermando che il POST. V è valido in entrambe le ipotesi, dell'angolo retto e dell'angolo ottuso, a prescindere dal fatto che uno dei due angoli sia retto, e che le due rette si incontreranno a

distanza finita e determinata.
XIV. *"L'ipotesi dell'angolo ottuso è assolutamente falsa perché distrugge se stessa"*.

È una conseguenza della PROP. XIII, che possiamo spezzare in due parti:

1) Ipotesi dell'angolo retto => vale il POST. V => s=4R (somma degli angoli interni di un quadrilatero birettangolo isoscele) => ipotesi dell'angolo retto.

2) Ipotesi dell'angolo ottuso => vale il POST. V (PROP. XIII) => s=4R => ipotesi dell'angolo retto => ¬ ipotesi dell'angolo ottuso.

Apparentemente l'ipotesi dell'angolo ottuso si contraddice da sola, come conseguenza del fatto che s=4R. In realtà, così facendo ottiene una contraddizione tra l'ipotesi dell'angolo ottuso e una conseguenza (s=4R) che appartiene ad un altro contesto geometrico (quello in cui è valida l'ipotesi dell'angolo retto). Cioè, così facendo non dimostra una contraddizione dell'ipotesi dell'angolo ottuso all'interno dello stesso contesto geometrico ma solo che le due ipotesi non sono compatibili.

IPOTESI DELL'ANGOLO ACUTO: ricerca di una contraddizione.

PROP. XXIII, XXIV, XXV, XXXI, XXXII, XXXIII
Qui Saccheri si concentra soprattutto su come si comportano le rette nell'ipotesi dell'angolo acuto.

Nell'ipotesi dell'angolo acuto non valgono il POST. V e l'unicità della parallela. Saccheri dimostra che nell'ipotesi dell'angolo acuto esistono una perpendicolare e un'obliqua a una stessa retta che non si incontrano.

Partendo dall'ipotesi dell'angolo acuto, per le coppie di rette nel piano esistono 3 possibilità:

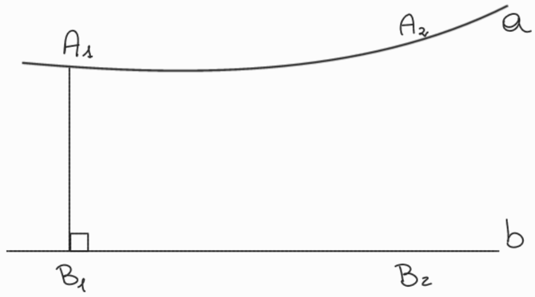
- Le rette sono incidenti;
- Le rette non sono incidenti e hanno una perpendicolare comune;
- Le rette non sono incidenti e non hanno una perpendicolare comune e si avvicinano indefinitamente.

    Nella geometria euclidea non è un caso possibile; nel caso della geometria iperbolica si chiamano rette ultraparallele.
    Questo terzo caso è contrario all'intuizione.

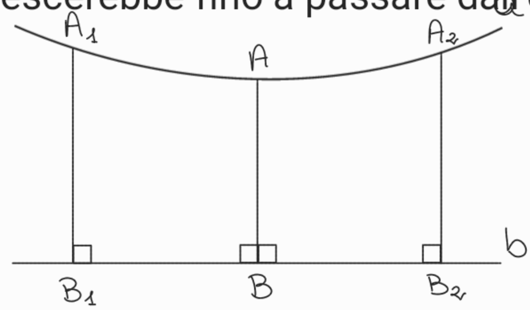
Siano a e b due rette complanari non incidenti (sul nostro foglio è necessario tracciarle parallele).
Dai punti A_1 e A_2 di a si traccino le perpendicolari A_1B_1 e A_2B_2.

Gli angoli $\hat{A}_1$ e $\hat{A}_2$ del quadrilatero ottenuto possono essere:
1. Uno retto e l'altro acuto;
2. Entrambi acuti;
3. Uno acuto e l'altro ottuso.

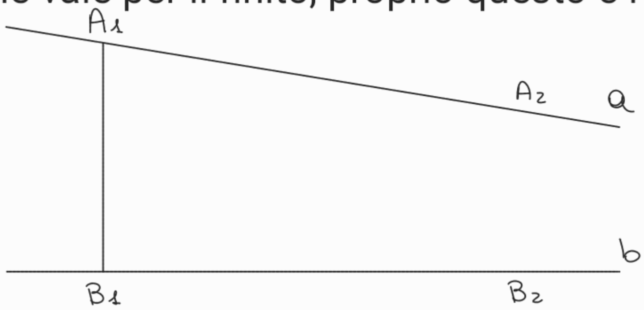
1. Le rette a e b hanno una perpendicolare comune, cioè A_1B_1.



2. Il piano è continuo, perciò nel passaggio dall'angolo acuto all'angolo ottuso, l'angolo deve passare da una posizione intermedia in cui è retto. Infatti, facendo scorrere A_1B_1 lungo la retta b, l'angolo crescerebbe fino a passare dall'essere acuto all'essere ottuso.



3. In questo caso pur facendo scorrere la retta A_1B_1 lungo la retta b l'angolo è sempre acuto. Potremmo dire che esiste una perpendicolare alle due rette all'infinito ma non possiamo estendere all'infinito una proprietà (la perpendicolarità) che vale per il finito; proprio questo è l'errore di Saccheri.



Quindi Saccheri ha trovato due rette complanari non incidenti che non hanno una perpendicolare comune, ma hanno un comportamento asintotico: la loro distanza diminuisce sempre di più ma non si incontrano. Il fatto che queste due rette avrebbero una perpendicolare comune solo all'infinito, secondo Saccheri è

“contrario alla natura della retta”.
XXXIII. *“L’ipotesi dell’angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta”.*

La diversa fraseologia tra la PROP. XIV e XXXIII indica che anche lo stesso Saccheri si era reso conto che non arrivava ad una contraddizione matematica ma a qualcosa che è contrario all’intuizione. Questo lo porta ad estendere all’infinito una proprietà (la perpendicolarità) che vale per il finito, ma è un errore. Secondo Saccheri, quindi, l’ipotesi dell’angolo ottuso e quella dell’angolo acuto sono false, per cui la sola geometria vera è la geometria euclidea.

Il lavoro di Saccheri è fondamentale perché la sua opera è considerata una delle opere più importanti nello studio dei fondamenti della geometria e rappresenta un punto di svolta, perché:
▪ innanzitutto, anche se in maniera inconsapevole, inaugura le geometrie non euclidee, cosa fino ad allora impensabile;

▪ utilizza una dimostrazione per assurdo, è il primo che apre la strada per poter considerare la non validità del POST. V, partendo dalla sua negazione per dimostrarne la validità;

▪ con lui parte l’idea di fondare la validità di una geometria non sull’evidenza intuitiva, sul riscontro tra la realtà delle cose e quello che possiamo rappresentare, ma solo sulla non contraddittorietà logica, per cui una geometria è valida anche se non si può rappresentare ciò che si costruisce.

Questo testo di Saccheri viene ignorato per molto tempo, soprattutto in Italia; Eugenio Beltrami è il primo italiano che scopre lo scritto di Saccheri.
Nel suo articolo “Un precursore italiano di Legendre e di Lobačevskij” (1889) valuta l’opera di Saccheri come quella di colui che ha preceduto le rivoluzioni geometriche dell’800 in rapporto alle teorie delle parallele.

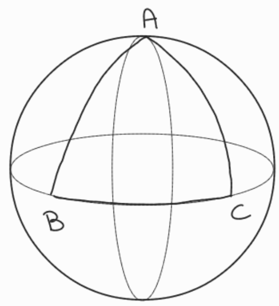
Lo scritto di Saccheri è presentato anche da Georg Simon Klügel nel volume “Recensione dei principali tentativi di dimostrare la teoria delle parallele” (1764).

Johann Heinrich Lambert (1728-1777), scrive “La teoria delle parallele” (1786, postuma) in cui ripercorre il discorso di Saccheri ma ne cerca una semplificazione: considera una retta AB, su tale retta traccia le due perpendicolari AC e BD, unisce C con D e considera uno dei due angoli in C e in D retti.
Si viene così a costruire una figura che viene chiamata QUADRILATERO

TRIRETTANGOLO, e le ipotesi vengono sviluppate solo sull'angolo in D.
1) D=1R => ipotesi dell'angolo retto
2) D>1R => ipotesi dell'angolo ottuso
3) D<1R => ipotesi dell'angolo acuto

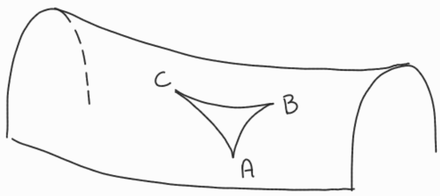
Considera poi le conseguenze sulla somma degli angoli interni di un triangolo:
1) $(\alpha+\beta+\gamma)-2R=0$
2) $(\alpha+\beta+\gamma)-2R>0$
3) $(\alpha+\beta+\gamma)-2R<0$
Rispettivamente, dove $(\alpha+\beta+\gamma)-2R$ è detta deficienza angolare.

Una questione che si pone Lambert è: qual è, se c'è, la relazione che lega l'area del triangolo con la somma dei suoi angoli interni?
A questo verrà data risposta nel 1800.



Consideriamo tre punti su una sfera.
Costruiamo il triangolo ABC il quale avrà tre angoli ottusi, quindi la somma degli angoli interni è maggiore di due retti.

Questa affermazione è valida se il triangolo ha i lati curvilinei? È un triangolo?
In realtà, vedendo la sfera immersa nel mondo tridimensionale percepiamo i lati del triangolo come curve, tuttavia se fossimo degli esseri bidimensionali sulla superficie della sfera, tra i due punti percorreremo dei tratti rettilinei.
Scegliendo in maniera opportuna delle porzioni di sfera, su di esse possiamo costruire la geometria che si basa sull'ipotesi dell'angolo ottuso.



Consideriamo invece una superficie a sella.
Presi tre punti, costruiamo il triangolo ABC tale che la somma dei suoi angoli interni è minore di due retti.

Anche in questo caso, se ci ponessimo sulla superficie della sella, i lati del triangolo apparirebbero come dei segmenti.
Su porzioni convenientemente scelte di tale superficie possiamo costruire la geometria che si basa sull'ipotesi dell'angolo acuto.

Lez. 12 --- 05/04

GEOMETRIE NON EUCLIDEE

La geometria euclidea si fonda sostanzialmente sul concetto di “parallele” e nasce per descrivere il mondo fisico. La geometria, così come in generale la matematica, nasce per risolvere dei problemi.
Le geometrie non euclidee apparentemente nascono senza alcuna utilità pratica, quasi per caso, da matematici che decidono di partire da ipotesi diverse da quelle di Euclide, per cui è molto legata alla libertà degli uomini che le hanno sviluppate.

Un’origine storica della geometria non euclidea si trova anche nei “Libri etici” di Aristotele, in cui si pone alcuni interrogativi su cosa succederebbe se la natura delle cose fosse diversa da quella che si conosceva (ad esempio se un triangolo avesse gli angoli tali che la loro somma sia diversa da due retti), tuttavia mancava delle conoscenze matematiche necessarie a sviluppare tali ipotesi e l’ambiente sociale e culturale del tempo non era adatto a porsi tali questioni.

Alcuni dei matematici successivi, come Clavio, hanno avanzato delle ipotesi diverse ma si sono fermati a considerazioni teoriche. Il punto di svolta si ha con Saccheri, che considera tali ipotesi logicamente equivalenti e cerca di ricavare le principali conseguenze che ne derivano.

In una scuola tedesca di Gottinga, quella che oggi chiamiamo “Accademia delle Scienze”, di cui facevano parte personaggi illustri (come Gauss), si discuteva ancora del meraviglioso problema, ma nel 1763 dichiara ufficialmente che bisognava rassegnarsi all’ipotesi Euclidea, che quindi il POST. V di Euclide era un postulato e la sua era l’unica geometria possibile. Questo perché per venti secoli, gli sforzi per risolvere il “problema delle parallele” non ebbero frutti.

Nonostante questa dichiarazione da parte di un istituto importante, l’interesse per questo argomento continuò a rimanere vivo e portò alla scoperta di nuovi sistemi geometrici.

Inoltre, in quel tempo (fine ‘700 – prima metà dell’800), la filosofia dominante era quella di Kant, secondo la quale non si fa un’esperienza diretta dello spazio ma si può conoscere lo spazio soltanto tramite i “giudizi sintetici a priori”. Le proposizioni euclidee sono tutte espresse tramite giudizi sintetici a priori, per cui viene considerata l’unica geometria che consente di conoscere lo spazio. Questa ideologia rende difficile considerare e accettare idee diverse, anche perché

avrebbe implicato l'esistenza di mondi diversi.
Karl Friedrick Gauss (1777-1855)

Gauss fu il primo matematico ad avere una chiara visione delle geometrie indipendenti dal POST. V.

Nonostante questo, non scrive nulla a riguardo (se non due piccole note e alcuni appunti personali), tenendo queste idee per sé per più di 50 anni, parlandone soltanto con alcuni amici tramite una fitta corrispondenza epistolare che ci ha permesso di conoscere le sue idee sull'argomento. Tra i matematici con cui condivide queste ipotesi: W. Bolyai, Albers, Schumacher, Gerling, Taurinus, Bessel.

Dalle sue lettere emerge innanzitutto il suo interesse verso lo sviluppo di questa nuova geometria, cui si riferisce con nomi diversi:

- Geometria anti-euclidea (lettera di Wachter)
- Geometria astrale (seguendo Schweikart)
- Geometria non euclidea (lettera a Schumacher).

In una lettera a Wolfgang Bolyai (1799) Gauss scrive che sta pensando molto all'ipotesi che la somma degli angoli interni di un triangolo sia minore di due retti e che sta elaborando cose molto interessanti nella sua testa. In una lettera a Taurinus (1824) consiglia a quest'ultimo di non divulgare le proprie elaborazioni. In due lettere a Bessel (1829 e 1830) scrive che non pubblica nulla dei suoi pensieri sulla nuova geometria perché teme "gli strilli dei Beoti" (cioè persone poco colte), quindi di non essere compreso.

Questo perché nella nuova geometria viene a mancare la relazione tra discorso geometrico e realtà.

In una delle 6 lettere tra Gauss e Schumacher (scritte tra il 1831 e il 1846) Gauss scrive che nella geometria non euclidea che sta considerando non trova alcuna contraddizione. Scriverà anche che la scelta di una delle due geometrie, cioè quella euclidea e quella basata sull'ipotesi dell'angolo acuto, per lui è un "capriccio arbitrario", perché entrambe hanno stesso diritto di esistenza, in quanto non vi sono contraddizioni.

János Bolyai (1802 – 1860)

Il primo scritto in cui troviamo esplicitati i presupposti della geometria non euclidea, il primo scritto scientifico completo di una geometria che si basa sull'ipotesi dell'angolo acuto, è "Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, e indipendente dalla verità dell'assioma 11° di Euclide (quello sulle parallele) giammai da potersi decidere a priori", scritto da János Bolyai e pubblicato nel 1832 in appendice al "Tentativo di dare suggerimenti per un migliore insegnamento dell'aritmetica e della geometria", opera del padre Wolfgang Bolyai. In questa memoria, Bolyai considera quelle proprietà geometriche che non dipendono dal postulato delle parallele, quindi valgono all'interno della geometria che si basa sull'ipotesi dell'angolo acuto ma non sono vere nel contesto della geometria euclidea.

In una delle lettere a Gauss, Wolfgang Bolyai gli chiede di leggere con attenzione l'appendice di János e di dirgli cosa ne pensa. In risposta, Gauss affermò che lodare il lavoro del figlio equivaleva a lodare se stesso, perché a quei risultati era già giunto circa 40 anni prima.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793 – 1856)

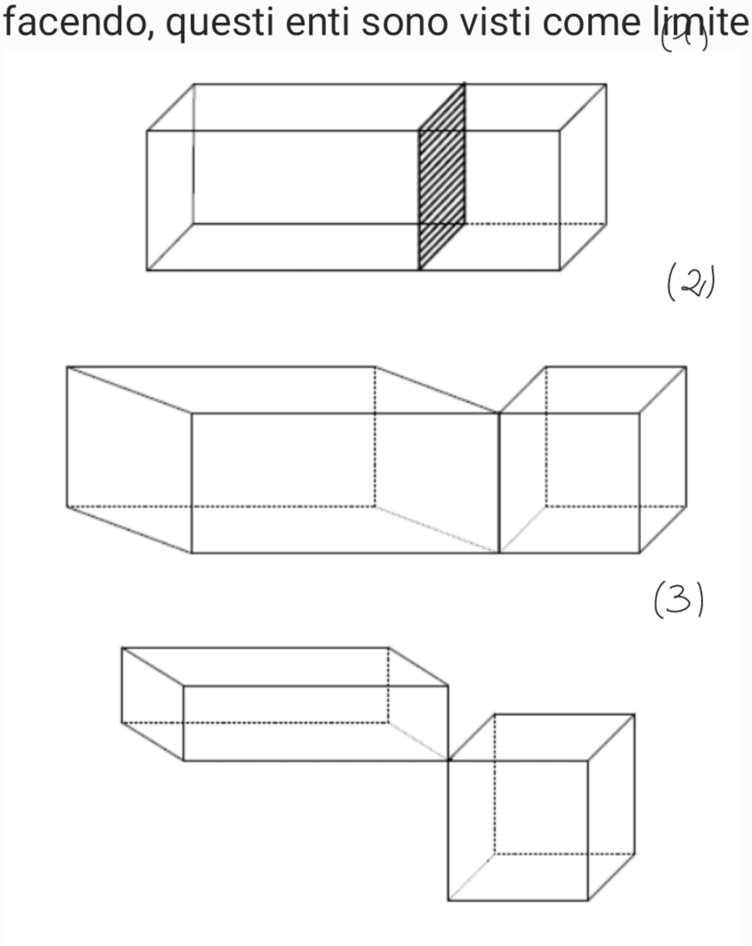
Chi poi sviluppa la geometria a partire dall'ipotesi dell'angolo acuto è Lobačevskij, a cui si dedicherà per il resto della sua vita. Alcune sue opere sull'argomento:

- "Esposizione succinta dei principi della geometria con una dimostrazione rigorosa del teorema delle parallele" (1826), in cui descrive i fondamenti di questa nuova geometria, non solo a livello di ipotesi ma con dimostrazione;
- "Sui fondamenti della geometria" (1829-30);
- "Geometria immaginaria" (1835);
- "Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele" (1835);
- "Studi geometrici con una teoria completa delle parallele" (1840);
- "Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele" (1855).

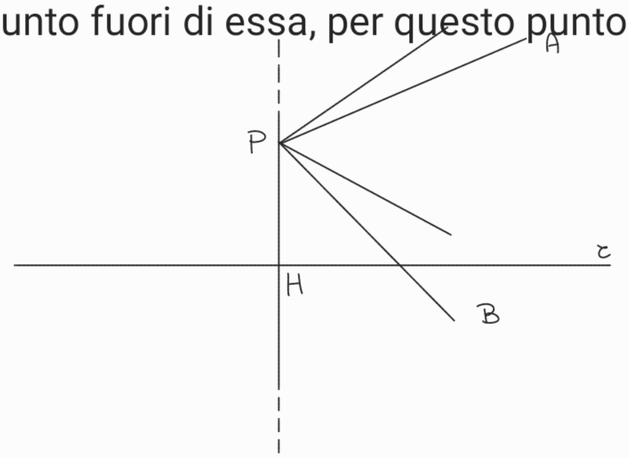
Questa geometria verrà conosciuta inizialmente come geometria di Bolyai-Lobačevskij, poi verrà indicata come GEOMETRIA IPERBOLICA dal matematico Felix Klein.

Lobačevskij, nel presentare la sua geometria, parte dai copri tridimensionali (procedimento opposto a quello di Euclide), quindi dal particolare all'universale, perché la nostra esperienza sensibile è basata su corpi tridimensionali e poi si può procedere con un'operazione di astrazione fino ad arrivare al punto.

Introduce il concetto di contatto fra corpi, mediante il quale e per mezzo di un'operazione di astrazione ottiene la superficie (1), la retta (2) e il punto (3); così facendo, questi enti sono visti come limite di un'esperienza di contatto.



POSTULATI DI LOBAČEVSKIJ:
POST. I di Euclide
POST. II di Euclide
POST. III di Euclide
POST. IV di Euclide
POST. V di Lobačevskij: "Data una retta e un punto fuori di essa, per questo punto passano due rette parallele alla retta data".

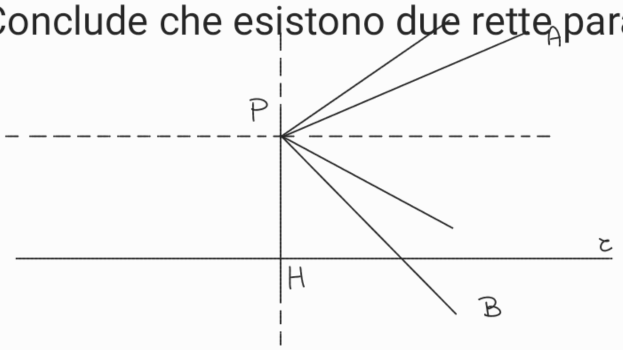


Consideriamo su un piano una retta r e un punto qualsiasi P fuori di essa. Dal punto P tracciamo la perpendicolare a r che la incontri nel punto H. Prolunghiamo la retta PH da entrambi i lati.

Fermiamo l'attenzione su uno dei due semipiani.
Del punto P escono infinite rette che giacciono su questo semipiano.
Indichiamo con A l'insieme delle rette divergenti da r e con B l'insieme delle rette che intersecano r. Questi due insiemi sono disgiunti.

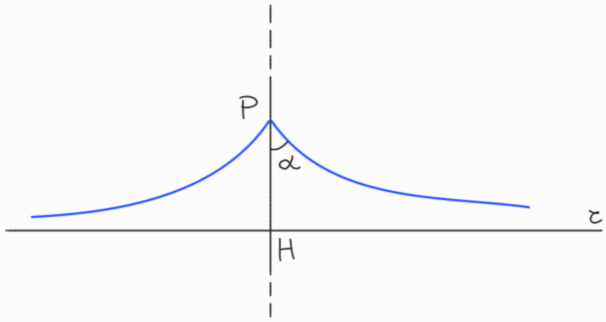
Per Lobačevskij esiste un elemento di separazione tra le rette che intersecano r e quelle che non le intersecano. Lobačevskij chiama “parallela” tale elemento di separazione. L’esistenza della parallela per come la intende Lobačevskij è garantita dalla continuità del piano.

Ripetendo il discorso per l’altro semipiano, si trova un altro elemento di separazione, ossia un’altra parallela.
Conclude che esistono due rette parallele alla retta data r passanti per i punto P.



<-- È questa? NO, questa è la parallela di Euclide. La parallela di Lobačevskij non si può disegnare su un piano euclideo qual è il nostro foglio.

Con una forzatura immaginativa possiamo rappresentarla così -->



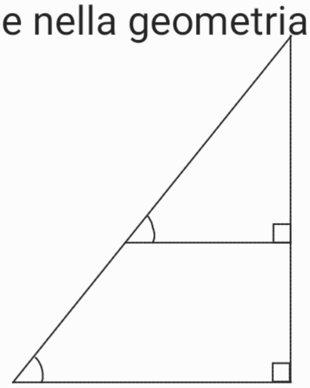
PH è detta distanza di parallelismo.
α è detto angolo di parallelismo.

Se PH tende a 0, allora α tende a $\pi/2$. Se PH tende a ∞ allora α tende a 0.
=> α assume valori che variano tra $0<\alpha<\pi/2$.

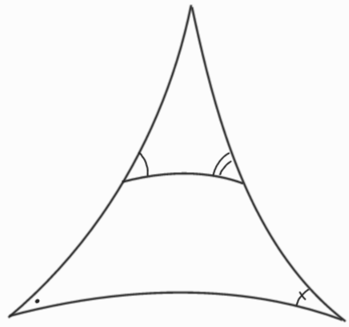
Gli estremi dell’intervallo sono esclusi: se $\alpha=0$ la parallela coincide con PH, se $\alpha=\pi/2$ si ha la geometria euclidea. Allora possiamo considerare la geometria euclidea come una “geometria limite” rispetto a quella di Lobačevskij.

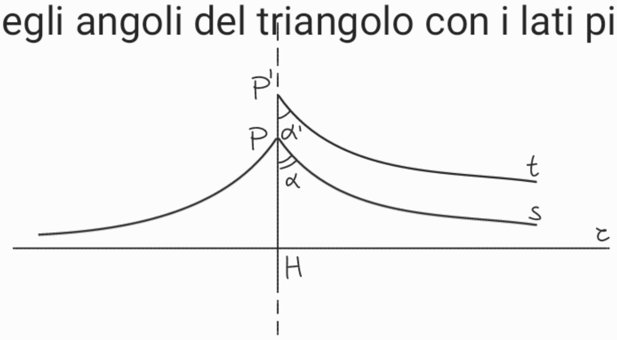
Dunque l’angolo di parallelismo varia al variare della distanza di parallelismo. Questo rappresenta una differenza sostanziale tra la geometria di Euclide e quella di Lobačevskij: se l’angolo dipende dalla lunghezza, più lunghi sono i lati di un triangolo, più piccole sono le ampiezze degli angoli, allora l’ampiezza degli angoli dipende dalla lunghezza dei lati. Questo implica che nella geometria di Lobačevskij non esistono figure simili.

Per Euclide i due triangoli sono simili, perché hanno i lati in proporzione e gli angoli corrispondenti congruenti.



Per le figure di Lobačevskij, le due condizioni da soddisfare sono le stesse, eppure è evidente nella figura (seppure non sia esatta ma una forzatura nel piano euclideo) che gli angoli del triangolo più piccolo hanno ampiezza maggiore rispetto a quella degli angoli del triangolo con i lati più lunghi.





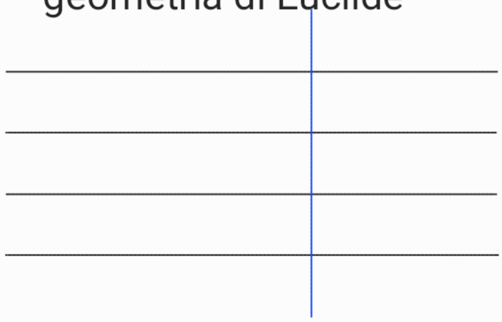
r//s e t//r
α>α’ => s non parallelo a t
=> non vale la proprietà transitiva
del parallelismo.

Una parte importante della “Geometria immaginaria” è la costruzione delle formule trigonometriche. In questa opera introduce due nuove figure, l’oriciclo e l’orisfera.

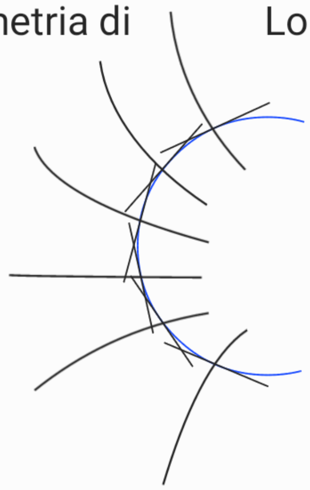
L’oriciclo è la traiettoria ortogonale di un fascio di rette parallele.

geometria di Euclide

ij



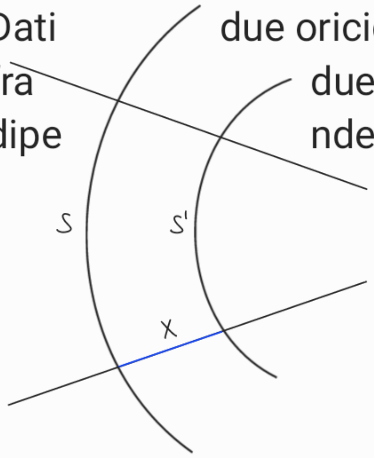
geometria di Lobačevsk



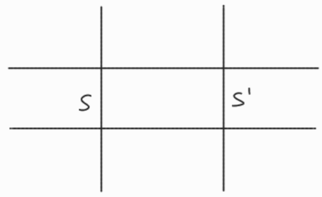
è rappresentato da una retta.

è una curva, il limite di un cerchio di raggio infinito, in cui la tangente in un punto della circonferenza è perpendicolare alla retta del fascio che passa per quel punto.

Dati due oricicli relativi a uno stesso fascio di rette parallele, il rapporto fra due archi di questi, compresi fra due parallele del fascio, dipende dalla loro distanza x:



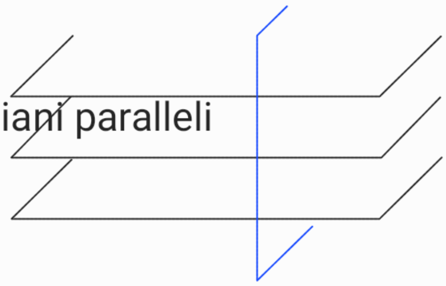
$s/s'=q^x$, dove q è una costante



Nel caso della geometria di Euclide, la distanza tra due rette parallele è costante, cioè s=s', perciò q=1.

Nella geometria di Lobačevskij, invece, q>1.

L'orisfera è una superficie ortogonale a un fascio di piani paralleli

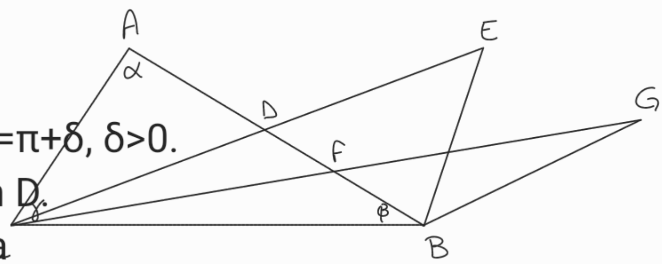


Nel caso della geometria di Euclide,
se consideriamo un fascio di piani paralleli,
la superficie perpendicolare ad ognuno di
quei piani paralleli è un piano.

Nella geometria di Lobačevskij, questa superficie è una sfera di raggio infinito.

Nella sua opera, Lobačevskij dimostra anche che su un'orisfera è possibile costruire la geometria di Euclide, prendendo come rette gli oricicli.

TEO I) *"In ogni triangolo la somma degli angoli interni non può superare π, cioè α+β+γ≤π".*



Supponiamo per assurdo che sia >π, cioè α+β+γ=π+δ, δ>0.
Sia D il punto medio di AB e congiungiamo C con D.
Prolunghiamo CD fino al punto E in modo che sia
CD=DE. Congiungiamo E con B.

Consideriamo i triangoli ADC e DEB:
AD=DB CD=DE ADC=EDB.
Per il I criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti.

Sia F il punto medio di DB e congiungiamo C con F.
Prolunghiamo CF fino al punto G in modo che sia CF=FG. Congiungiamo G con B.

Consideriamo i triangoli CDF e FGB:

DF=FB CF=FG DFC=GFB.

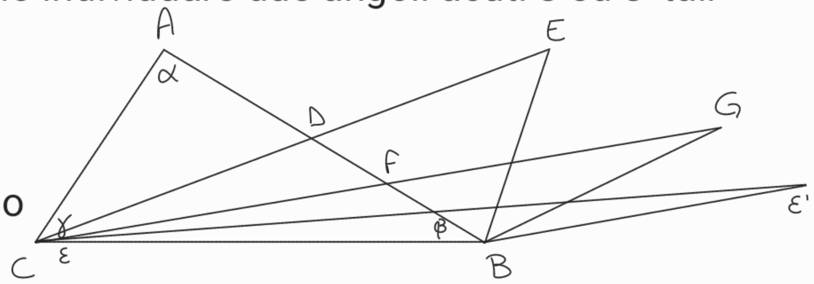
Per il I criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti.

Dopo un certo numero di passi possiamo individuare due angoli acuti ε ed ε' tali che $\varepsilon<\delta/2$ e $\varepsilon'<\delta/2$

Cioè tali che $\varepsilon+\varepsilon'<\delta/2+\delta/2=\delta$

Sommando gli angoli rettilinei dell'ultimo triangolo otteniamo $\varepsilon+\varepsilon'+\hat{B}=\pi+\delta$.

Da cui ricaviamo $\hat{B}=\pi+\delta-(\varepsilon+\varepsilon')$ dove $\varepsilon+\varepsilon'<\delta$.



Poniamo $\delta-(\varepsilon+\varepsilon')=\lambda>0$.

Allora $\hat{B}=\pi+\lambda$ ASSURDO in qualsiasi geometria.

Quindi non è possibile che la somma degli angoli interni sia $>\pi$.

Lez. 13 --- 11/04

TEO II) *"In tutti i triangoli o la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale a π oppure è sempre minore di π".*

PARTE I: Supponiamo che in tutti i triangoli rettangoli la somma degli angoli interni sia uguale a π e dimostriamo che lo è in tutti gli altri triangoli.

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC. Supponiamo che sia $\alpha+\beta+\hat{C}=\pi$.

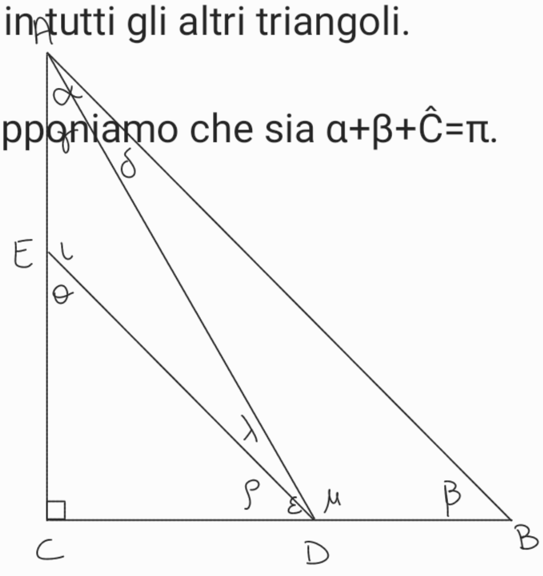
Poiché il triangolo ABC è rettangolo in C, allora $\hat{C}=\pi/2$ e $\alpha+\beta=\pi/2$.

Sia D un punto qualunque su CB; congiungiamo D con A.

Allora $\hat{A}=\alpha=\gamma+\delta$ e $D=\mu+\varepsilon=\pi$.

Sia E un punto qualunque su AC; congiungiamo E con D.

Allora $\varepsilon=\lambda+\rho$ e $\hat{E}=\iota+\theta=\pi$.



Abbiamo costruito tre triangoli rettangoli ABC, ADC, EDC. Sappiamo che:

$\alpha+\beta=\pi/2$ $\gamma+\varepsilon=\pi/2$ $\theta+\rho=\pi/2$

Consideriamo il triangolo non rettangolo ADB; la somma dei suoi angoli interni è:

$\delta+\mu+\beta=(\alpha-\gamma)+(\pi-\varepsilon)+\beta=\pi+(\alpha+\beta)-(\gamma+\varepsilon)=\pi+\pi/2-\pi/2=\pi$

Nel triangolo non rettangolo ADE si ha:
$\gamma+\iota+\lambda=\gamma+(\pi-\theta)+(\varepsilon-\rho)=\pi+(\gamma+\varepsilon)-(\theta+\rho)=\pi+\pi/2-\pi/2=\pi$
PARTE II: Supponiamo che in tutti i triangoli rettangoli la somma degli angoli interni sia minore di π e dimostriamo che lo è negli altri triangoli.

Supponiamo allora $\alpha+\beta+\hat{C}<\pi$. Ripetiamo la costruzione precedente.

Sappiamo che:
$\alpha+\beta<\pi/2$ (ABC) $\gamma+\varepsilon<\pi/2$ (ACD) $\theta+\rho<\pi/2$ (ECD)

Consideriamo il triangolo non rettangolo ADB:
$\delta+\mu+\beta=(\alpha-\gamma)+(\pi-\varepsilon)+\beta=\pi+(\alpha+\beta)-(\gamma+\varepsilon)<\pi$

perché $(\alpha+\beta)-(\gamma+\varepsilon)<0$ in quanto $(\alpha+\beta)<(\gamma+\varepsilon)$, poiché nella geometria di Lobačevskij l’angolo di parallelismo è funzione della distanza (e viceversa), l’ampiezza degli angoli dipende dalla lunghezza dei lati e l’area del triangolo dipende dalla somma degli angoli interni: più grande è l’area, più piccola è la somma degli angoli interni, cioè più grande è il difetto angolare (quello che manca per arrivare a π). In questo caso il triangolo ABC ha un’area più grande del triangolo ACD perché lo contiene al suo interno ed anche la somma dei lati di ABC è maggiore della somma dei lati di ACD, perciò si ha $(\alpha+\beta)<(\gamma+\varepsilon)$.

Nel triangolo non rettangolo ADE si ha:
$\gamma+\iota+\lambda=\gamma+(\pi-\theta)+(\varepsilon-\rho)=\pi+(\gamma+\varepsilon)-(\theta+\rho)<\pi$

in quanto $(\gamma+\varepsilon)<(\theta+\rho)$, infatti il triangolo ECD è contenuto in ACD, perciò la somma degli angoli interni del triangolo ACD sarà minore della somma degli angoli interni del triangolo ECD.

In questo modo Lobačevskij dimostra che sono vere sia la sua geometria (iperbolica) sia la geometria euclidea, ma che sono incompatibili tra loro: non possiamo mettere insieme elementi appartenenti a due geometrie diverse, e se qualcosa è vera in un caso, sarà vero in tutti gli altri casi ma dello stesso contesto geometrico.

Bernhard Riemann (1826-1866)

Nella sua opera, la memoria “Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria” (completata nel 1854, pubblicata del 1868), procede partendo dai corpi tridimensionali, quindi dal particolare, per focalizzarsi sulla geometria dell'angolo ottuso.

POSTULATI DI RIEMANN:

I di Euclide

II di Riemann: *"La linea retta ha lunghezza finita".*

Dato che Riemann costruisce la sua geometria su una superficie e tutte le geodetiche sono finite, allora anche la retta non può essere infinita, perciò sostituisce il postulato della retta infinita con quello della retta finita.

III di Euclide

IV di Euclide

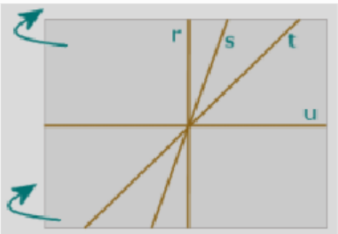
V di Riemann: *"Data una retta e un punto fuori di essa, per quel punto non passa alcuna retta parallela alla retta data".*

GEOMETRIA SU UNA SUPERFICIE

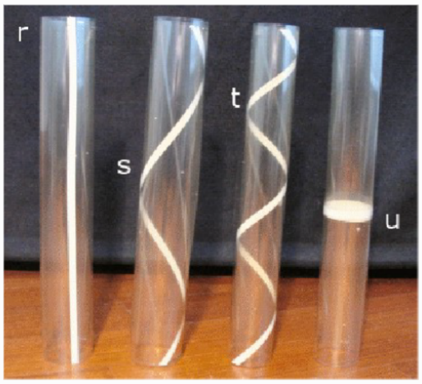
Possiamo costruire una "geometria su una superficie" che consideriamo per regioni convenientemente limitate.

Nei corpi tridimensionali non parliamo di piano ma di superficie; il corrispettivo di una retta su una superficie si dice geodetica (che dall'esterno appare curvilinea), mentre il segmento, che è una parte di retta, si definisce come un arco di geodetica.

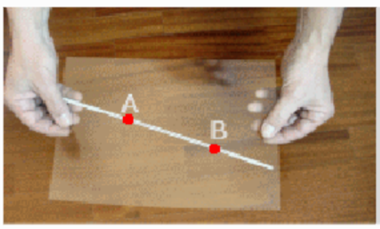
Consideriamo uguali (geodeticamente), sopra una superficie, due figure tracciate su di essa che possano farsi corrispondere punto per punto, in modo che le distanze geodetiche fra le coppie di punti corrispondenti siano uguali.

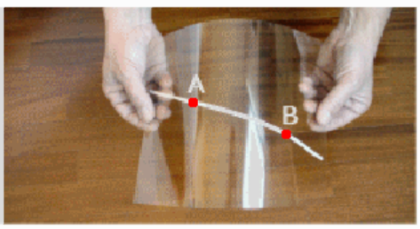


Es. superficie cilindrica

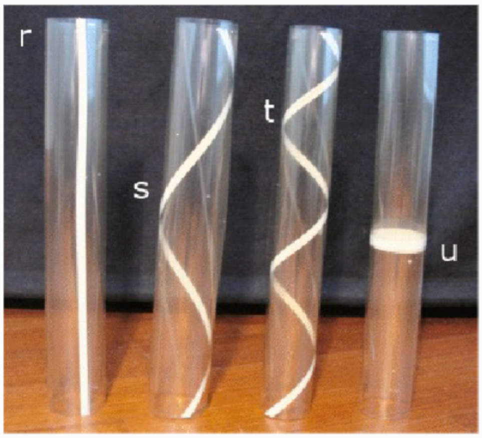


Tracciamo alcune rette su un foglio lucido.



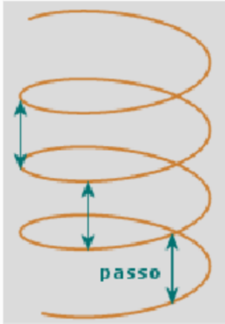


Arrotoliamo il lucido orizzontalmente in modo che il foglio si sovrapponga più volte su se stesso: le linee rette della



superficie piana del lucido appaiono sulla superficie del cilindro come curve.

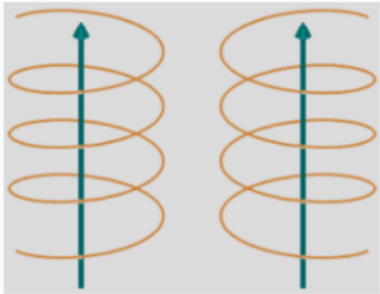
Tracciamo una retta su un lucido e due punti A e B su di essa. La distanza tra A e B cambia quando la retta si arrotola sul cilindro?



Le linee curve r, s, t, u si chiamano eliche circolari.

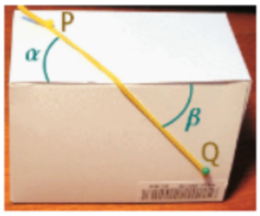
r è una retta generatrice del cilindro;
u è una circonferenza che si trova su un piano perpendicolare all’asse del cilindro.

Le eliche in figura hanno “passo” (distanza costante tra due spire successive) diverso.

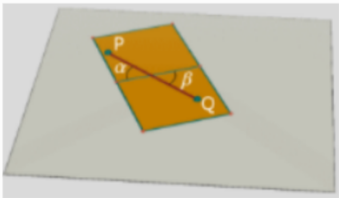


Da r a u il passo delle eliche diminuisce sempre di più, passando da ∞ a 0.

Prendendo due punti distinti P e Q, possiamo tracciare infinite linee geodetiche passanti per P e Q: basterà prendere eliche con passo diverso. Man mano che il passo diminuisce, l’arco di geodetica tra P e Q aumenterà di lunghezza.

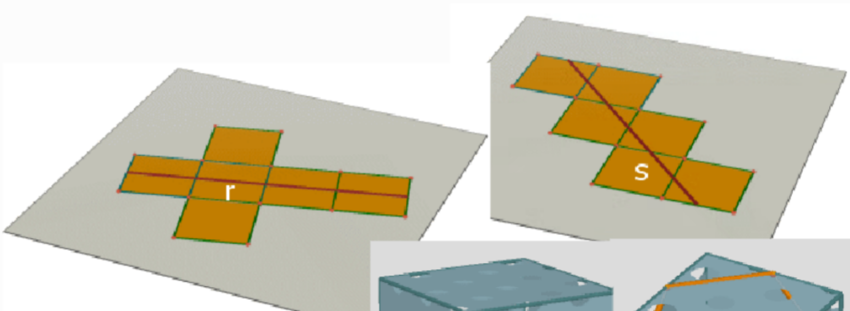


Arrotolando il lucido nell’altro modo possibile (ribaltando il foglio prima di arrotolarlo) otteniamo una geodetica diversa, che è detta

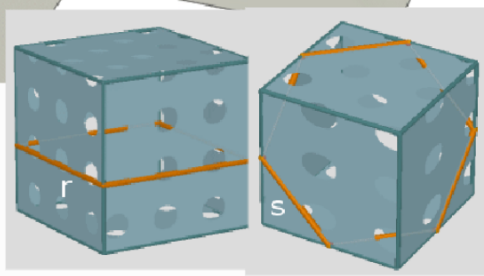


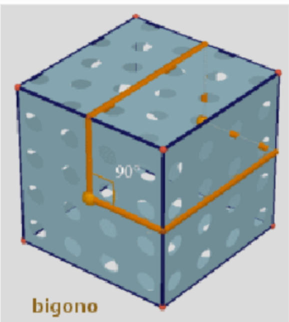
destrorsa se procede verso destra o sinistrorsa se si avvolge verso sinistra.

Es. scatola di forma cubica



In questo caso, se prendiamo due punti P e Q su una stessa faccia otteniamo come arco geodetico ancora un segmento, mentre se li prendiamo su facce





diverse apparirà come una spezzata, in cui gli angoli α e β che forma con la scatola sono uguali.

Infatti, se rappresentiamo su un piano le due facce su cui abbiamo preso i punti P e Q, vedremo α e β come angoli opposti al vertice.

Sviluppiamo un cubo su un piano.
I due segmenti r ed s in figura, una volta costruito il cubo, diventeranno due geodetiche, e appariranno rispettivamente come un quadrato e un esagono regolare.

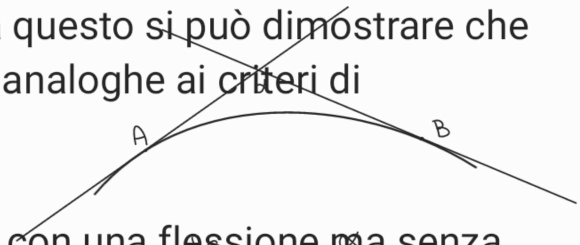
Nel piano euclideo si possono costruire poligoni aventi 3 o più lati, ma su altre superfici, come una scatola cubica, esisteranno anche poligoni con soli due lati chiamato BIGONO.

Lez. 14 --- 12/04

Un modo intuitivo per sapere se si può costruire una geometria analoga su due superfici differenti è verificare se due porzioni di superfici sono applicabili l'una sull'altra con una flessione senza estensione.

Ad esempio, una superficie cilindrica non si può applicare su una superficie piana, perciò su di essa (considerata interamente) non possiamo costruire una geometria analoga alla geometria euclidea. Tuttavia una porzione di superficie cilindrica si può applicare su una porzione di superficie piana, perciò possiamo costruire una geometria analoga alla geometria euclidea solo su parti di superficie convenientemente scelte.

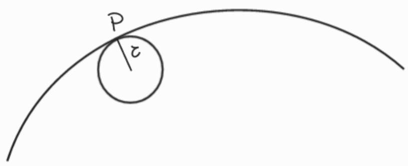
Nel caso di una superficie sferica, non si più applicare su una superficie piana né l'intera superficie sferica né una porzione di tale superficie. Tuttavia esiste una analogia: sia la sfera sia il piano possono muoversi liberamente su se stessi, ad esempio ruotando attorno ad un'asse, e a partire da questo si può dimostrare che per le figure uguali sulla sfera valgono proposizioni analoghe ai criteri di congruenza nel piano.



Perché una superficie possa muoversi liberamente, con una flessione ma senza estensione, è necessario che un certo numero abbia valore costante in tutti i punti della superficie: tale numero è stato introdotto da Gauss come "curvatura".

$K_{media} = \frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}$

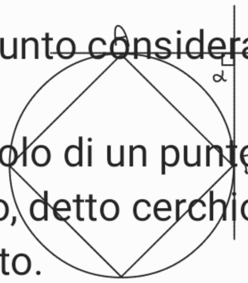
Si chiama curvatura media di un arco di curva piana il rapporto tra l'angolo formato dalle tangenti nei suoi estremi e la lunghezza dell'arco stesso.



La curvatura di una curva in un punto è il limite a cui tende la curvatura media di un suo arco quando gli estremi dell'arco si

$K = \frac{1}{r}$

avvicinano indefinitamente al punto considerato.



$$K_m = \frac{\alpha}{\widehat{AB}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi r} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{2\pi r} = \frac{1}{r}$$

In un intorno infinitamente piccolo di un punto, si identifica un arco di curva con un arco di un opportuno cerchio, detto cerchio osculatore o cerchio di curvatura della curva nel punto considerato.

$$K = K_{media} = \frac{1}{r}$$

Il raggio e il centro di tale cerchio sono detti rispettivamente raggio e centro di curvatura.

La curvatura di una linea (curva piana) in un punto è l’inverso del raggio del cerchio osculatore in quel punto:

Ad esempio, la curvatura di una circonferenza assume lo stesso valore in ogni punto:

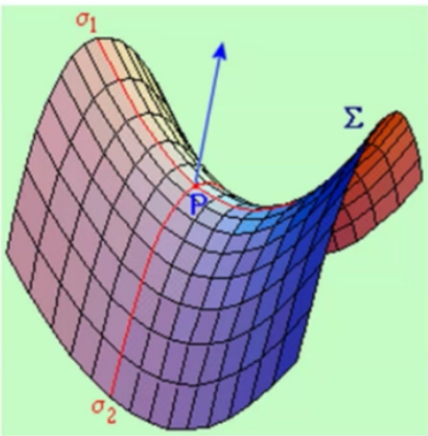
CURVATURA DI UNA SUPERFICIE

Per un punto P di una superficie tracciamo la normale n alla superficie stessa. Per farlo tracciamo la perpendicolare passante per il punto al piano tangente alla superficie in quel punto P.
Consideriamo il fascio di piano per n e il relativo fascio di curve che esso taglia sulla superficie. Abbiamo tante curve quanti sono i piani (infiniti), che sono intersezione tra un piano e la superficie.

$$K = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2}$$

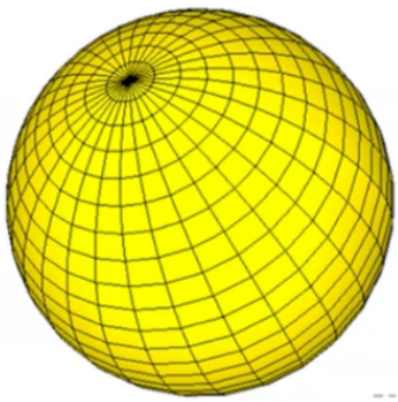
$$K = \frac{1}{r^2}$$

Tra le curve (piane) di tale fascio ne esistono due ortogonali fra loro che hanno, nel punto P, l’una raggio di curvatura massimo e l’altra raggio di curvatura minimo:
• esse si dicono sezioni principali,
• i raggi di curvatura r_1 e r_2 di queste due sezioni sono detti raggi principali di curvatura,
• i rapporti 1/r_1 e 1/



Le sezioni normali per P volgono la concavità sia da una parte che dall’altra rispetto alla normale

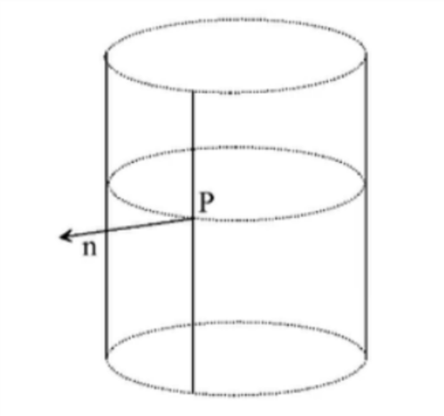
k<0



Le sezioni normali per P volgono la concavità dalla stessa parte rispetto alla normale

k>0

r_2 prendono il nome di curvatura principali della superficie.

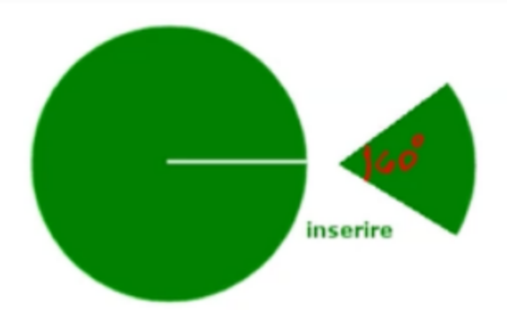


Il prodotto delle curvature principali è noto come curvatura totale o di Gauss della superficie nel punto P:

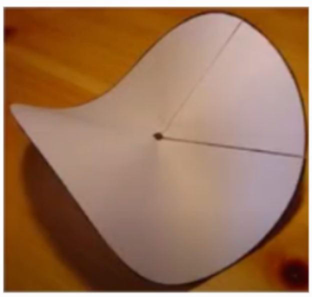
Per esempio, per la sfera, poiché $r_1=r_2=r$, la curvatura è sempre uguale:
La sfera ha curvatura sempre positiva e costante in tutti i suoi punti.

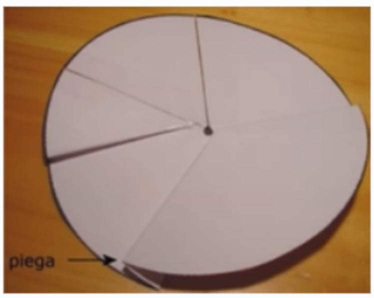
Metodo intuitivo per riconoscere il segno della curvatura:

Consideriamo un cilindro (senza basi) e due sezioni normali ortogonali per P:

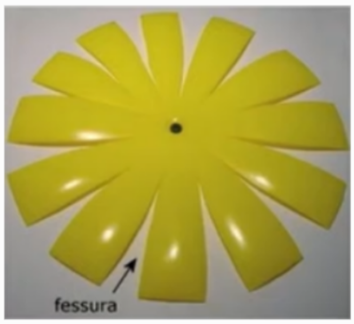


La sezione verticale è una retta e ha curvatura minima $k_2=0$, la sezione orizzontale è una circonferenza ed ha curvatura massima k_1.

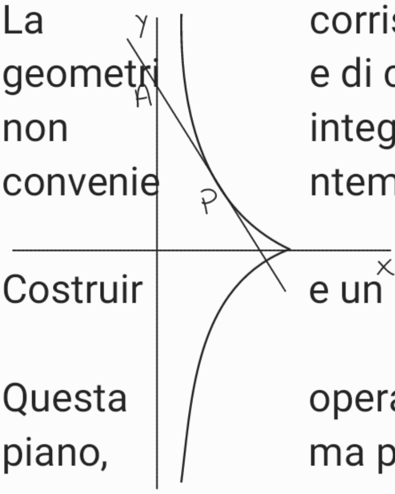




Le due sezioni saranno ortogonali tra di loro nel punto P, e la curvatura della superficie in P è:
$k=k_1 \cdot k_2=0$



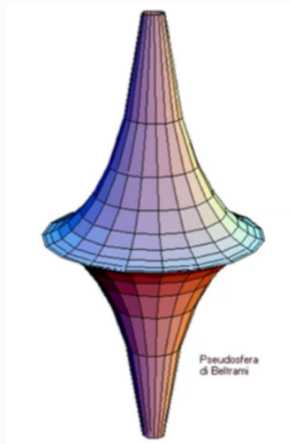
Quando superfici diverse hanno lo stesso segno di curvatura e il valore della curvatura è costante in tali porzioni di superfici convenientemente scelte, allora in tali superfici possiamo costruire la stessa geometria: se la curvatura è nulla possiamo costruire una geometria analoga a quella di Euclide (es. superficie cilindrica), se ha segno negativo possiamo costruire una geometria analoga a quella di Lobačevskij (es. superficie a sella), se ha segno positivo possiamo costruire una geometria analoga a quella di Riemann (es. sfera).



La corrispondenza tra una porzione di superficie e una delle tre geometrie di cui sopra avviene soltanto dal punto di vista differenziale e non integrale, cioè avviene soltanto su porzioni di superficie convenientemente scelte ma non sull'intera superficie.

Costruire un modello di superficie a sella:

Questa operazione di inserimento non è possibile se si rimane nel piano, ma possiamo farla se flettiamo la superficie:



Una sella invade più superficie di quanta possa stare nel piano.

Si formano delle pieghe, delle sovrapposizioni. Quando succede questo, la curvatura ci aspettiamo che sia negativa.

Se invece si creano delle fessure ci aspettiamo che sia positiva. Una sfera ha meno superficie di quanta ne serve per stare sul piano (->).
Esempio di superficie a curvatura negativa: la pseudosfera.

Consideriamo in un piano cartesiano una trattrice, cioè una curva piana i cui punti verificano una proprietà: il segmento di retta tangente a un punto della curva e compreso tra il punto di tangenza e una retta fissata nel piano è costante.

PA = costante

PA è il segmento di retta tangente a un punto della curva compreso tra il punto di tangenza P e la retta fissata che è l'asse y. Quando questo segmento si mantiene costante, il punto P descrive la trattrice. In questo caso l'asse y è un asintoto per la curva.

Se facciamo ruotare una trattrice attorno al suo asintoto
(che sarà l'asse di rotazione) otteniamo un solido di rotazione
che si chiama pseudosfera, e che sarà una superficie a
curvatura costante negativa. (considerata la prima volta da
Eugenio Beltrami).

$k=0$ superfici applicabili sul piano, sulle quali, scelta una opportuna porzione, possiamo costruire una geometria analoga a quella di Euclide.

$k<0$ superfici applicabili sulla pseudosfera, modello per le superfici a curvatura negativa, su cui, scelta una opportuna porzione, possiamo costruire una geometria analoga a quella di Lobačevskij.

$k>0$ superfici applicabili su una superficie sferica, con $r=\sqrt{(1/k)}$, modello per le superfici a curvatura positiva, su cui, scelta una opportuna porzione, possiamo costruire una geometria analoga a quella di Riemann.

Possiamo ritenere comuni alla geometria della superficie, cioè una geometria che possiamo costruire partendo da una qualsiasi superficie, tutte quelle proprietà che sono relative a regioni limitate di piano e che sono indipendenti dal postulato delle parallele e nella cui dimostrazione non si fa uso del piano completo (non si considera l'infinità di una retta).

Lez. 15 --- 26/04

Riemann si rende conto di staccarsi dalla concezione kantiana e dalla geometria euclidea quando introduce il concetto di:

VARIETÀ PLURIDIMENSIONALE
concetto introdotto quando tenta di ricoprire una superficie con pezzetti di carta (rottura con la geometria euclidea).

Riemann considera lo spazio come una varietà a tre dimensioni.
Afferma che l'area del triangolo differenziale su una superficie è:

$A=1/k[(\alpha+\beta+\gamma)-\pi]$ dove α,β,γ sono gli angoli interni del triangolo.

$\Rightarrow Ak=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$

1) $k=0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=\pi$ (geometria euclidea)
curvatura=0 => raggio di curvatura-->∞ => il piano è un cerchio di raggio infinito.

2) $k<0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma<\pi$ (geometria di Lobačevskij)

3) $k>0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma>\pi$ (geometria di Riemann)

Un precedente si trova in una memoria di Gauss del 1825.
Gauss dimostrò che sopra una superficie a curvatura k:
$\iint k d\sigma=\alpha+\beta+\gamma-\pi$ dove α,β,γ sono gli angoli interni del triangolo infinitesimale σ.

L'integrale doppio su σ è l'area del triangolo, infatti:
$\iint k d\sigma=k\iint d\sigma=kA=[(\alpha+\beta+\gamma)-\pi]$

Gauss pur avendola dimostrata non tratta alcun argomento geometrico.

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894)
Fisico, autore di due opere:
1. "Sui fatti che stanno o fondamento della geometria" (1868)
2. "Sull'origine del significato degli assiomi geometrici" (1870)

Von Helmholtz matematizza mediante la trattazione analitica (non intuitiva e quindi oggettiva) le ipotesi di Riemann.
DEDUZIONE --> forma di ragionamento più appropriata per la geometria.
Sistemi geometrici differenti possono avere lo stesso procedimento logico.

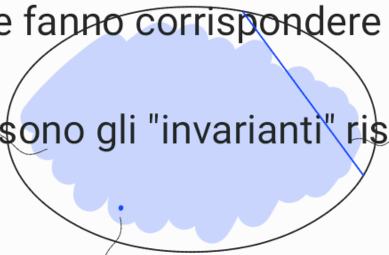
NON CONTRADDITTORIETÀ DELLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE
Ricerca di un modello (situazione geometrica concreta in cui valgono i postulati della geometria in considerazione).

Eugenio Beltrami (1835-1900)

"Saggio di interpretazione della geometria non euclidea" (1868).
Beltrami dimostra che la curvatura della pseudosfera è negativa => geometria di Lobačevskij.

Felix Klein (1849-1925)

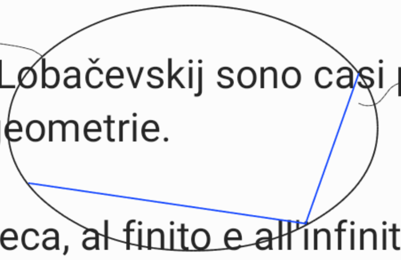
"Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti" (1872)
Si occupa della GEOMETRIA PROIETTIVA, considera per ogni geometria un gruppo di "trasformazioni" che fanno corrispondere punti a punti, rette a rette, piani a piani.
Le proprietà di ogni proprietà sono gli "invarianti" rispetto a quel gruppo di trasformazioni.



piano
(regione di punti
interni della conica)

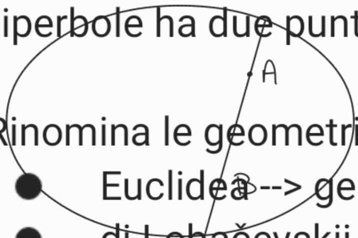
Nel "Programma di Erlangen" (1872) non arriva a risultati ma elabora un programma. Classifica le geometrie euclidea e non da un punto di vista proiettivo:

- euclidea --> isometrie
- non euclidee --> trasformazioni proiettive



Quelle di Euclide, Riemann e Lobačevskij sono casi particolari della geometria proiettiva, quindi sono sottogeometrie.

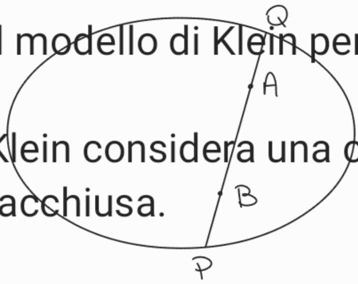
Nella proiettiva tutto si interseca, al finito e all'infinito: le rette parallele si incontrano all'infinito, le due braccia di una parabola si incontrano in un punto, l'iperbole ha due punti all'infinito.



Rinomina le geometrie:

- Euclidea --> geometria parabolica
- di Lobačevskij --> geometria iperbolica
- di Riemann --> geometria ellittica

Il modello di Klein per la geometria iperbolica:



Klein considera una conica qualunque e la regione del piano euclideo da essa racchiusa.

retta (corda della conica
esclusi gli estremi)

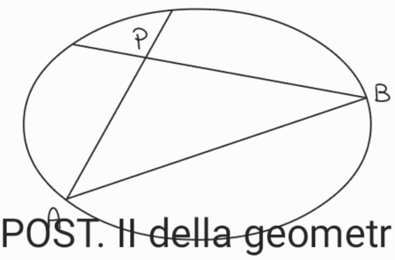
punto
(interno alla conica)

La conica è la retta all'infinito costituita dai punti all'infinito.

rette parallele
poiché aventi un punto

all'infinito comune

POST. I della geometria di Lobačevskij



verificato

POST. II della geometria di Lobačevskij

(QPAB) -> birapporto

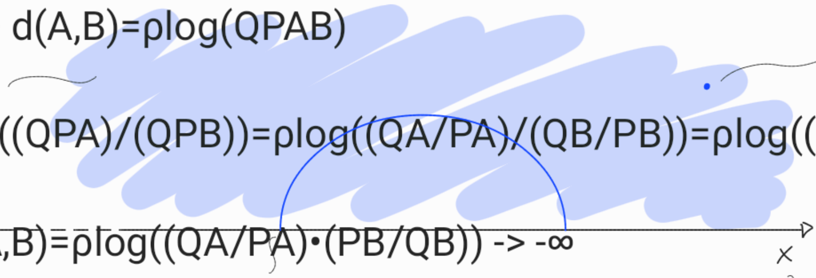
(QPAB)=(QPA)/(QPB)
dove (QPA)=QA/PA rapporto semplice, cioè rapporto tra due segmenti (è un numero).

distanza AB --> d(A,B)=ρlog(QPAB)

=> d(A,B)=ρlog((QPA)/(QPB))=ρlog((QA/PA)/(QB/PB))=ρlog((QA/PA)•(PB/QB))

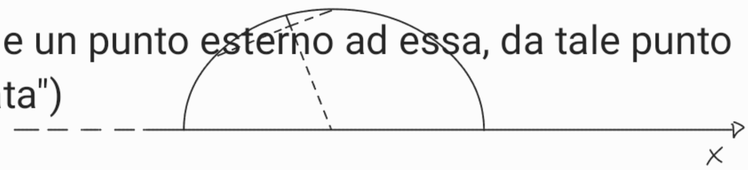
Se B->P ,   d(A,B)=ρlog((QA/PA)•(PB/QB)) -> -∞

Se B->Q ,   d(A,B)=ρlog((QA/PA)•(PB/QB)) -> +∞



=> la corda è infinita => POST. II verificato
POST. III e IV di Lobačevskij sono verificati.

POST. V di Lobačevskij ("Data una retta e un punto esterno ad essa, da tale punto passano due corde parallele a quella data")



verificato

Tale situazione concreta proposta da Klein è un modello per la geometria di Lobačevskij.

Il modello di Poincaré per la geometria iperbolica:

Poincaré divide il piano in due semipiani e ne considera uno.

piano
un semipiano
esclusa la retta x

retta
una semicirconferenza
con centro sulla retta x

POST. I di Lobačevskij

Tracciamo l'asse della corda AB che
interseca la retta c nel centro della
semicirconferenza.

POST. II

=> Modello di geometria di Lobačevskij.

Un modello della geometria ellittica:

Consideriamo una sfera.

piano
superficie sferica

punto
coppia di punti antipodali,
cioè diametralmente opposti
(altrimenti non si
verificherebbe il POST. I)

retta
unacirconferenza massima

POST. I verificato

POST. II lunghezza circonferenza=$2\pi r$ => sempre finita

POST. III, IV verificati.

POST. V verificato, poiché sulla sfera due circonferenze massime si incontrano sempre => per un punto esterno a una retta data non passa alcuna parallela.

Lez. 16 --- 28/04

Un modello per la geometria non euclidea è una situazione geometrica concreta nella quale sono verificati i postulati della geometria che si sta considerando. L'aver trovato anche solo un modello per le geometrie non euclidee ha rassicurato i matematici sul fatto che tali geometrie non fossero contraddittorie.

Nel modello della geometria di Riemann, se si considera "punto" un punto sulla superficie sferica i postulati della geometria di Riemann non sono verificati: nel POST. I per due punti antipodali (diametralmente opposti) passano infiniti cerchi massimi (cioè quelli che chiamiamo "retta"). Per cui è necessario chiamare "punto" una coppia di punti diametralmente opposti.

La geometria di una superficie a curvatura costante, in generale non rispecchia l'intera geometria del piano di Lobačevskij o di Riemann, la corrispondenza non c'è dal punto di vista integrale. Per cui si è iniziata a cercare una superficie particolare per la quale la geometria costruita sull'intera superficie fosse in corrispondenza con la geometria costruita sull'intero piano (a curvatura positiva o negativa). A questo hanno risposto due matematici tramite i loro teoremi:
TEOREMA DI HILBERT

"Non esiste alcuna superficie regolare su cui valga nella sua integrità (cioè nella sua completezza) la geometria di Lobačevskij".

TEOREMA DI LIEBMANN

"Una superficie su cui valesse nella sua integrità (cioè nella sua completezza) la geometria di Riemann dovrebbe essere necessariamente chiusa. L'unica superficie regolare chiusa a curvatura costante positiva è la sfera".

In definitiva, nello spazio ordinario non esistono superfici che verifichino integralmente tutte le proprietà dei piani non euclidei, cioè sulle quali vale nella loro integrità la geometria di Lobačevskij o di Riemann.

Quanti sono i modelli per ogni geometria di fatto non lo sappiamo, è certo che se esiste almeno un modello certamente quella geometria non è contraddittoria.

PROBLEMA DELLE APPROSSIMAZIONI

Come sono nati i primi valori approssimati, i modi di procedere.

L'espressione 1+1=2 dal punto di vista geometrico esprime il TEO di Pitagora in un triangolo rettangolo con cateti uguali a 1. L'ipotenusa di tale triangolo, nonché

n	$m^2=2n^2+1$	$m^2=2n^2-1$	m	$\sqrt{2}$	appross.
1 valore assegnato	$m^2=3$ non accettabile perché $m=\sqrt{3}$	$m^2=1$ si ottiene m=1	1 dalla seconda relazione	$\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$	Per difetto
2	$m^2=9$ da cui m=3	$m^2=7$ non è quadrato perfetto	3 dalla prima relazione	$\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$	Per eccesso
3	$m^2=19$ non accettabile	$m^2=17$ non accettabile	Non si hanno valori utili di m	-	-
4	$m^2=33$ non accettabile	$m^2=31$ non accettabile	Non si hanno valori utili di m	-	-
5	$m^2=51$ non accettabile	$m^2=49$ da cui m=7	7	$\frac{m}{n}=\frac{7}{5}$	Per difetto
6	$m^2=73$ non accettabile	$m^2=71$ non accettabile	Non si hanno valori utili di m	-	-
7	$m^2=99$	$m^2=97$	Non si hanno valori utili di m	-	-
8	$m^2=129$	$m^2=127$	Non si hanno valori utili di m	-	-
9	$m^2=163$	$m^2=161$	Non si hanno valori utili di m	-	-
10	$m^2=201$	$m^2=199$	Non si hanno valori utili di m	-	-
11	$m^2=243$	$m^2=241$	Non si hanno valori utili di m	-	-
12	$m^2=289$ da cui m=17	$m^2=287$ non accettabile	17	$\frac{m}{n}=\frac{17}{12}$	Per eccesso

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
m	1	3			7							17	...

la diagonale del quadrato costruito, misura $d=\sqrt{2}$.

Il problema della relazione tra il lato e la diagonale del triangolo viene affrontato per la prima volta dalla scuola pitagorica: "Il lato e la diagonale del quadrato sono tra di loro incommensurabili", cioè $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

n	1	2	5	10	29	70	...
m	1	3	7	17	41	99	...

Supponiamo per assurdo che sia razionale, allora si avrebbe

$\sqrt{2}=m/n$ con m,n appartenenti a N e primi tra loro.

Allora $2=m^2/n^2$

Cioè $m^2=2n^2$ => ASSURDO, perché anche i quadrati di numeri primi tra loro sono primi tra loro.

Così si dimostra che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Fino a quel momento si lavora con numeri interi o razionali, ma trovandosi di fronte numeri che non si conoscono, nonostante fosse evidente la loro esistenza dal punto di vista geometrico, nasce il problema di dove collocarli nella scala dei numeri. A questo scopo, cominciano a cercarsi dei valori approssimati.
Nel caso di $\sqrt{2}$ si cercano due numeri interi m e n tali che con essi ci si avvicini sempre di più alla relazione $m^2=2n^2$, quindi che soddisfino una delle due seguenti relazioni: $m^2=2n^2+1$ oppure $m^2=2n^2-1$

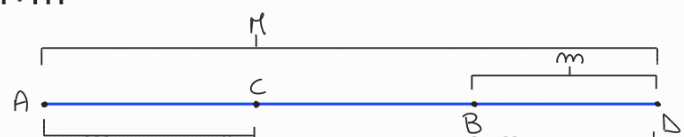
In corrispondenza di queste due relazioni, si troveranno i valori approssimati di $\sqrt{2}$, rispettivamente per eccesso o per difetto, nella forma m/n.
Più grandi saranno i valori di m e n migliore sarà l'approssimazione.

Si svolge allora una serie di calcoli (procedimento empirico):

Da cui:

Osservando questa tabella dei valori di n e m si è determinata una relazione tra gli m ed n successivi e quelli precedenti: se indichiamo con N e M i valori da trovare e n e m quelli conosciuti, allora:

$$N=n+m$$
$$M=2n+m$$



Una traccia di questo procedimento si trova nell'opera "Esposizione delle conoscenze matematiche utili per la lettura di Platone" di Teone da Smirne e nel "Commento alla Repubblica di Platone" di Proclo.
Una traccia di natura geometrica si può trovare negli "Elementi" di Euclide, in particolare nelle PROP. II,9 e II,10:

II,9) *"Se si divide una linea retta in parti uguali e disuguali, la somma dei quadrati delle parti disuguali è il doppio della somma del quadrato della metà della retta e del quadrato della parte compresa fra i punti di divisione".*

Consideriamo un segmento AB.

Si divida in parti uguali nel punto medio C
e in parti disuguali nel punto D qualsiasi.

n	$m^2=3n^2+1$	$m^2=3n^2-2$	m	$\sqrt{3}$	appross.
1 valore assegnato	$m^2=4$ da cui m=2	$m^2=1$ si ottiene m=1	2 e 1	$\frac{2}{1}=2$ e $\frac{1}{1}=1$	Per eccesso e per difetto
2	$m^2=13$ non accettabile	$m^2=10$ non accettabile	Non si hanno valori utili di m	-	-
3	$m^2=28$ non accettabile	$m^2=25$ da cui m=5	5	$\frac{5}{3}$	Per difetto
4	$m^2 49$ da cui m=7	$m^2=46$ non accettabile	7	$\frac{7}{4}$	Per eccesso
5	$m^2=76$	$m^2=73$	-	-	-
6	$m^2=109$	$m^2=106$	-	-	-
7	$m^2=148$	$m^2=145$	-	-	-
8	$m^2=193$	$m^2=190$	-	-	-
9	$m^2=244$	$m^2=241$	-	-	-
10	$m^2=301$	$m^2=298$	-	-	-
11	$m^2=364$	$m^2=361$ da cui m=19	19	$\frac{19}{11}$	Per difetto
12	$m^2=433$	$m^2=430$	-	-	-
13	$m^2=508$	$m^2=505$	-	-	-
14	$m^2=589$	$m^2=586$	-	-	-
15	$m^2=676$ da cui m=26	$m^2=673$	26	$\frac{26}{15}$	Per eccesso

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
m	2, 1		5	7							19				26	...

Allora: $AD^2+DB^2=2(AC^2+CD^2)$

n	1	4	15	...
m	2	7	26	...

n	1	3	11	...
m	1	5	19	...

Se poniamo AD=M, DB=m, AC=N CD=n possiamo scrivere:
$M^2+m^2=2(N^2+n^2)$

$M=AD=AC+CD=CB+CD=(CD+DB)+CD=2CD+DB=2n+m$

$N=AC=CB=CD+DB=n+m$

n	1	4	15	56	209	780	...
m	2	7	26	97	362	1351	...

n	1	3	11	41	153	...
m	1	5	19	71	265	...

II,10) *"Se si divide per metà una linea retta e un'altra le è aggiunta per diritto, il quadrato di tutta la prima retta più quella aggiunta e il quadrato della retta aggiunta, presi ambedue insieme, sono il doppio della somma del quadrato della metà della prima retta e del quadrato descritto,* *come su una sola linea retta, sulla retta composta dalla metà della prima e da quella aggiunta".*

Consideriamo un segmento AB.
Si divida a metà nel punto medio C.
Prolunghiamo AB in modo da aggiungere
un segmento, ad esempio BD.
Allora: $(AB+BD)^2+BD^2=2(AC^2+CD^2)$

Di fatto, questa è la proposizione gemella della PROP. II,9, da cui differisce per la posizione del punto D.
Se poniamo $AD=M$, $BD=m$, $AC=n$ $CD=N$ possiamo scrivere:
$M^2+m^2=2(n^2+N^2)$

$M=AD=AC+CD=AC+(CB+BD)=AC+(AC+BD) =2AC+BD=2n+m$
$N=CD=CB=CB+BD=AC+BD=n+m$
Allo stesso modo di sono cercati I valori approssimati di √3, cercando due numeri m e n tali da soddisfare la relazione $m^2=3n^2$:
Tuttavia non si riusciva a trovare una relazione valida per tutti i valori, per cui si sono suddivisi in due tabelle:

Se indichiamo con N e M i valori da trovare e n e m quelli conosciuti, in entrambe le tabelle saranno valide:

$$N=2n+m$$
$$M=3n+2m$$

Alcune di queste approssimazioni di √3 verranno poi utilizzate da Archimede per approssimare π.
Archimede

Archimede nasce probabilmente nel 287 a.C. Studia matematica presso il Museo di Alessandria. Muore nel 212 a.C., ucciso da un soldato romano.
Si narrano diversi episodi delle imprese di Archimede, ma non sono forti certe e

non si riesce a distinguere la verità dalla leggenda.

A noi sono pervenuti molti scritti di Archimede. Si notano delle differenze rispetto agli scritti di Euclide:

▪ Una prima differenza si trova nel tipo di trattazione: mentre Euclide svolge un insegnamento elementare, non tralasciando nessun particolare e non presupponendo alcuna cognizione preliminare, Archimede non ha alcuno scopo didattico, per cui molto spesso tralascia quello che lui considera minuzie e lascia al lettore molti passaggi che in realtà sono tutt'altro che banali, per cui si pensa che Archimede si volesse riferire a persone con conoscenze matematiche pregresse e in grado di integrare le parti che lui ritiene scontate; nonostante questo, entrambi partono da proposizioni primitive, deducendone altre proposizioni sempre più complesse.

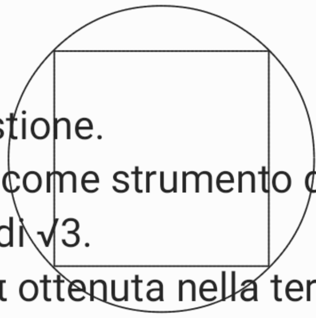
▪ Inoltre, nelle opere di Archimede troviamo regole di misura e molti calcoli aritmetici, mentre negli "Elementi" di Euclide si parla solo di dimostrazioni geometriche, senza uso di calcoli; Archimede dedica "La misura del cerchio" interamente alla determinazione di valori approssimati del rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio, cioè alla determinazione di π.

Quando Archimede deve affrontare un problema o dimostrare un teorema, procede sempre allo stesso modo: confronta le grandezze che deve determinare, sulle quali deve ragionare, e considera tutte le possibilità, di uguaglianza o di disuguaglianza; poiché è vera solo una di queste possibilità, che lui sa essere vera, ne cerca una dimostrazione geometrica, dimostrando che partendo dalle altre possibilità si arriva ad una contraddizione. È un modo di procedere per assurdo, all'interno del quale inserisce un proprio metodo, chiamato "metodo di esaustione", che in realtà venne introdotto precedentemente dal matematico e astronomo Eudosso di Cnido, discepolo di Platone, vissuto prima di Euclide, probabilmente ad Atene, e attivo tra il 350-310 a.C.

A Eudosso si attribuisce la teoria delle proporzioni che si sviluppa poi nel V e X libro degli "Elementi" di Euclide, oltre appunto al metodo di esaustione, che a noi è arrivato grazie agli scritti di Archimede (oltre ai riferimenti negli "Elementi").
Il metodo di esaustione consiste nel ripetere un numero finito di volte una stessa operazione geometrica.

"La misura del cerchio" è un'opera di Archimede che contiene solo 3 teoremi.
Dallo stile in cui è redatta quest'opera e da alcuni elementi si ha l'impressione che

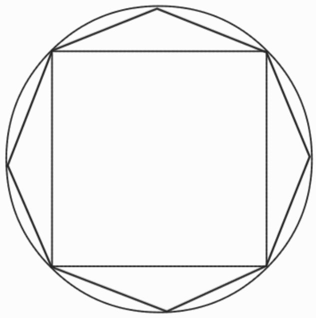
quella a noi pervenuta non sia la versione originale di Archimede, perché nella dimostrazione della seconda proposizione si utilizza la terza, per cui si pensa che i teoremi non ci siano giunti nell'ordine corretto e potrebbe esserci una parte mancante.



Nella prima proposizione viene presentato il metodo di esaustione.
Nella terza proposizione il metodo di esaustione viene usato come strumento di calcolo per approssimare π, affiancato alle approssimazioni di √3.
Nella seconda proposizione, usando un'approssimazione di π ottenuta nella terza, si confrontano aree e si ottengono altri risultati.

PROP. 1) *"Ogni cerchio è uguale a un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale a un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [uguale all'altro cateto]".*

Indichiamo con:
Ac l'area del cerchio
At l'area del triangolo rettangolo
r il raggio del cerchio
$c_1=r$ un cateto del triangolo e $c_2=2\pi r$ l'altro cateto del trian
golo.



È noto che: $At=\frac{1}{2}\cdot c_1\cdot c_2=\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2\pi r=\pi r^2=Ac$
Ma Archimede vuole dare di questo una dimostrazione geometrica.

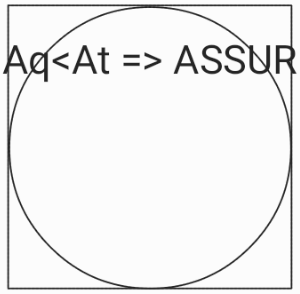
Lez. 17 --- 02/05
Le grandezze in gioco cono Ac e At, e confrontando le due aree possiamo avere:
Ac=At
Ac>At
Ac<At

Per dimostrare che Ac=At, sapendo che questa relazione è vera, considera gli altri casi:
CASO I) Ac>At (considera poligoni inscritti al cerchio, raddoppiando il numero dei lati ad ogni passaggio);
CASO II) Ac<At (allo stesso modo, considerando poligoni circoscritti al cerchio).
CASO I) Ac>At
Allora poniamo A=Ac-At (>0).

Costruiamo un quadrato inscritto nel cerchio, allora:

Aq<Ac   perchè inscritto.
=> A_1=Ac-Aq (>0).

Confrontando A_1 con A, si possono verificare due casi:
1) A_1<A
=> Ac-Aq<Ac-At
=> Aq>At
Aq=½•perimetro•apotema<½•2πr•r=½•cateto1•cateto2=At => Aq<At => ASSURDO!

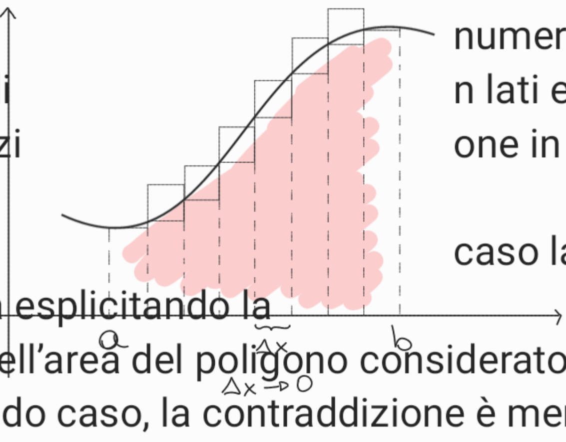


2) A_1>A
=> Ac-Aq>Ac-At
=> Aq<At   => apparentemente non c'è contraddizione.

Raddoppiando i lati del poligono,
otteniamo un ottagono tale che
Ao<Ac   perché inscritto.
=> A_2=Ac-Ao (>0).

Anche in questo caso, confrontando A_2 con A si verificano due casi:
1) A_2<A   => assurdo, per un ragionamento analogo al primo caso precedente.

2) A_2>A
Si verifica una situazione analoga al secondo caso precedente, perciò si procede raddoppiando nuovamente i lati del poligono, ottenendo così un poligono di 16 lati con un'area As, che confronta con A.



Dopo un numero finito di passi, si trova un poligono regolare di n lati e An<Ac, e si arriva ad una contraddizione in entrambe le situazioni considerate.
Perché?
Nel primo caso la contraddizione è quasi immediata, e ci si arriva esplicitando la formula dell'area del poligono considerato.
Nel secondo caso, la contraddizione è meno evidente ma si presenta:

Le aree dei poligoni, che sono tutte grandezze omogenee tra di loro, rappresentano una successione (che possiamo prolungare a piacere):
Aq Ao As … At … An … Ac

Cioè si troverà un poligono di n lati tale che la sua area è compresa tra At e Ac, e

An>At

An=½•perimetro•apotema<½•c_1•c_2=At (perché inscritto nel cerchio) => ASSURDO!

CASO II) Ac<At

Allora poniamo A=At-Ac (>0).

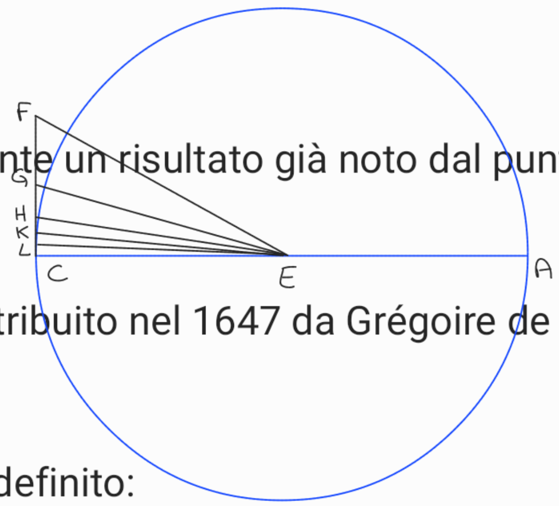
Costruiamo un quadrato circoscritto al cerchio,
e procediamo in modo analogo al caso precedente
fino ad arrivare ad un poligono di n lati tale che An>Ac:

Ac … An … At … As Ao Aq

An<At

An=½•perimetro•apotema>½•c_1•c_2=At (perché circoscritto) => ASSURDO!

=> Ac=At



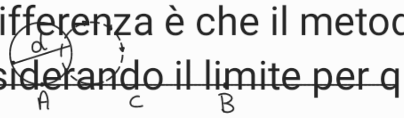
Così Archimede ha dimostrato geometricamente un risultato già noto dal punto di vista analitico.

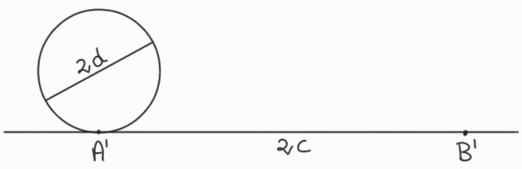
Il nome "METODO DI ESAUSTIONE" è stato attribuito nel 1647 da Grégoire de Saint-Vincent.

Viene utilizzato per la definizione di integrale definito:

$\int f(x)dx$ => area sottesa dalla curva

La differenza è che il metodo di esaustione odierno procede all'infinito, considerando il limite per qualcosa che tende all'infinito di una certa quantità.

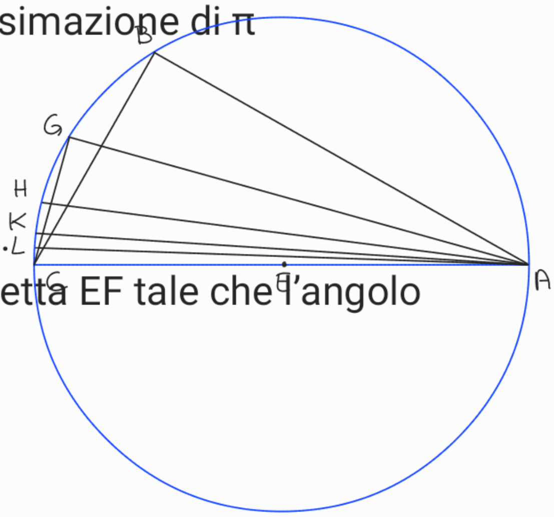




PROP. 3) *"La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera di meno di un settimo del diametro e di più di 10/71esimi".*
(nella dimostrazione della PROP. 2 utilizza la PROP. 3, quindi probabilmente questa opera non ci è giunta nella versione originale).

$3 \cdot 2r + 10/71 \cdot 2r < 2\pi r < 3 \cdot 2r + 1/7 \cdot 2r$

$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$ => approssimazione di π

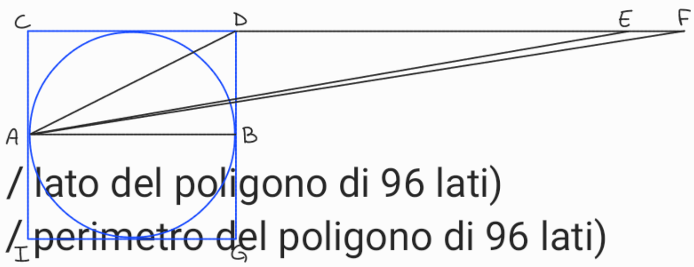


I PARTE) $\pi < 3 + 1/7$

Consideriamo un cerchio di diametro AC e centro E.
Tracciamo la retta CF tangente al cerchio in C e la retta EF tale che l'angolo $C\hat{E}F = 30°(=\pi/6=\frac{1}{3} \cdot r)$.

Nel triangolo rettangolo EFC si ha EF/FC=2.
Calcoliamo EC/FC.
Tracciamo EG bisettrice di $F\hat{E}C$.
Calcoliamo EC/GC.
Tracciamo EH bisettrice di $G\hat{E}C$.
Calcoliamo EC/HC.
Tracciamo EK bisettrice di $H\hat{E}C$.
Calcoliamo EC/KC.
Tracciamo EL bisettrice di $K\hat{E}C$.
Calcoliamo EC/LC.

Poiché il triangolo EFC ha gli angoli di 30° e 60°, possiamo pensare ad FC come alla metà del lato dell'esagono regolare circoscritto al cerchio.
Allo stesso modo GC è la metà del lato del poligono regolare di 12 lati circoscritto al cerchio, HC di quello di 24 lati, KC di quello di 48 lati e LC di quello di 96 lati.
Inoltre, EC è il raggio della circonferenza.



Allora:
$(2 \cdot EC)/(2 \cdot LC) = d/l$ (= diametro del cerchio / lato del poligono di 96 lati)
$d/(l \cdot 96) = d/p$ (= diametro del cerchio / perimetro del poligono di 96 lati)
$p/d < 3 + 1/7$ => π=(circonferenza/diametro)$<p/d<3+1/7$

c/d=costante=π
e indica quante volte il diametro di una circonferenza è contenuto nella circonferenza rettificata.

II PARTE) $\pi>3+10/71$

Consideriamo un cerchio di diametro AC e centro E.
Costruiamo l'angolo $B\hat{A}C=30°(=\pi/6=⅓\cdot r)$.

Nel triangolo rettangolo ABC si ha $AC/BC=2$.
Tracciamo AG bisettrice di $B\hat{A}C$.
Calcoliamo AC/GC, dove GC è il lato del
poligono regolare di 12 lati inscritto nel cerchio.
Tracciamo AH bisettrice di $G\hat{A}C$.
Calcoliamo AC/HC, dove HC è il lato del
poligono regolare di 24 lati inscritto nel cerchio.
Tracciamo AK bisettrice di $H\hat{A}C$.
Calcoliamo AC/KC, dove KC è il lato del
poligono regolare di 48 lati inscritto nel cerchio.
Tracciamo AL bisettrice di $K\hat{A}C$.
Calcoliamo AC/LC, dove LC è il lato del
poligono regolare di 96 lati inscritto nel cerchio.

Allora:
$AC/LC=d/l$ (= diametro del cerchio / lato del poligono di 96 lati)
$d/(l\cdot 96)=d/p$ (= diametro del cerchio / perimetro del poligono di 96 lati)
$p/d>3+10/71$ => π=(circonferenza/diametro)$>p/d>3+10/71$

PROP. 2) *"Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14".*

$A_{cerchio}:A_{quadrato}=11:14$

Consideriamo un cerchio di diametro AB
e il quadrato circoscritto a esso CDGI.
Prolunghiamo CD di un segmento $DE=2CD$
e DE di un segmento $EF=1/7\cdot CD$.

Congiungiamo D,E,F con A e calcoliamo le aree dei triangoli rettangoli ottenuti:
$A(ACD)=½\cdot AC\cdot CD$
$A(ACE)=½\cdot AC\cdot CE=½\cdot AC\cdot(CD+DE)=½\cdot AC\cdot(CD+2CD)=½\cdot AC\cdot 3CD=3/2\cdot AC\cdot CD$
$A(ACF)=½\cdot AC\cdot CF=½\cdot AC\cdot(CD+DE+EF)=½\cdot AC\cdot(CD+2CD+1/7\cdot CD)=½\cdot AC\cdot(22/7\cdot CD)=$
$=11/7\cdot AC\cdot CD$

Per costruzione, il triangolo rettangolo ACD preso 4 volte è uguale all'area del quadrato CDGI: $AB^2=CD^2=4A(ACD)$

Inoltre: $A(ACF)=A_{cerchio}$

Infatti: $A(ACF)=11/7\cdot AC\cdot CD=11/7\cdot r\cdot 2r=22/7\cdot r^2$, dove 22/7 approssimazione di π

Allora:

$$\frac{A_{cerchio}}{AB^2}=\frac{A(ACF)}{4\cdot(ACD)}=\frac{(11/7\cdot AC\cdot CD)}{(4\cdot ½\cdot AC\cdot CD)}=\frac{11}{14}$$

Calcola poi i seguenti rapporti di aree (mostra che è possibile con tale metodo):

$$\frac{A(ACE)}{A(ACD)}=\frac{(3/2\cdot AC\cdot CD)}{(½\cdot AC\cdot CD)}=3=\frac{21}{7}$$

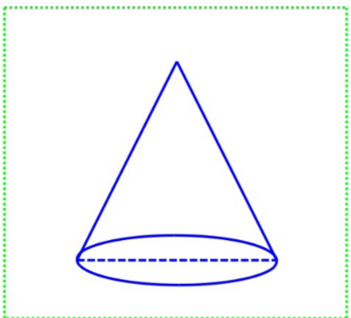
$$\frac{A(ACD)}{A(AEF)}=\frac{A(ACD)}{(A(ACF)-A(ACE))}=\frac{(½\cdot AC\cdot CD)}{(11/7\cdot AC\cdot CD-3/2\cdot AC\cdot CD)}=\frac{(½\cdot AC\cdot CD)}{(1/14\cdot AC\cdot CD)}=7$$

$$\frac{A(ACF)}{A(ACD)}=\frac{(11/7\cdot AC\cdot CD)}{(½\cdot AC\cdot CD)}=\frac{22}{7}$$

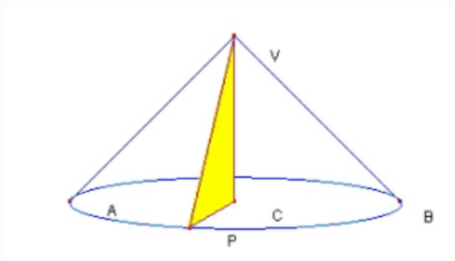
Tutti i risultati di Archimede saranno poi di fatto la base su cui, a partire dal XVI secolo, si svilupperà l'analisi moderna.

Apollonio

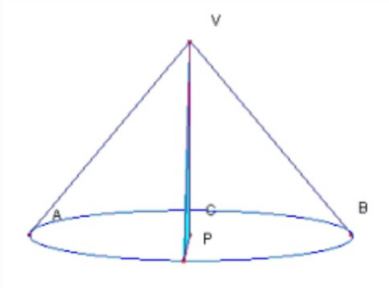
Apollonio vive dopo Archimede e prima dell'astronomo Ipparco. Studi più recenti fanno risalire la sua morte al 170 a.C..
Di Apollonio non abbiamo notizie certe, ma lo conosciamo grazie ad altri autori, che nelle loro opere citano il suo nome e i suoi risultati. In particolare:



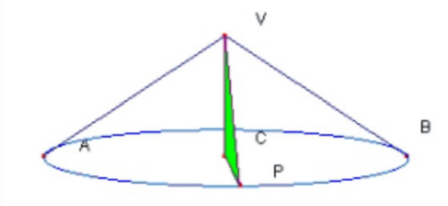
- EUTOCIO DI ASCALONA, che scrive un Commento agli "Elementi Conici", l'opera principale di Apollonio, colloca la sua nascita a Perga o Pergamo (nell'attuale Turchia) durante il regno di Tolomeo Ervegete, quindi intorno al 247 a.C..



- TOLOMEO CHENNO nelle sue "Nuove storie di erudizione" riferisce che Apollonio conduce i suoi studi di matematica presso il Museo di Alessandria, dove Euclide aveva insegnato e i suoi discepoli continuavano ad insegnare; quindi possiamo dire che si forma alla scuola di Euclide.



- PAPPO D'ALESSANDRIA (III-IV sec d.C.) nelle sue "Col
lezioni matematiche" parla di Apollonio come l'autore degl
i "Elementi Conici", appunto la sua opera principale.
Il testo degli “Elementi conici” è diviso in 8 libri:
I-IV descrive le principali coniche;
V-VIII risolve problemi utilizzando le coniche.



Di questi, fino al 1600 si conoscono soltanto i primi I
V; siamo venuti a conoscenza dei successivi libri
grazie a Pappo che ne parla nelle sue “Collezioni
matematiche”, ma non ci sono pervenute copie di questi.

Ancora oggi, quella di Apollonio è considerata la presentazione delle coniche più completa dell’antichità, e tutti i successivi scritti che riguarderanno le coniche avranno come riferimento e modello l’opera di Apollonio.

Un’edizione completa degli “Elementi conici” è stata redatta nel 1710 da Edmond Halley, in cui viene fatta la traduzione latina dei primi IV libri scritti in greco e viene fatta un’opera di “divinazione”, cioè di ricostruzione delle parti mancanti del testo.

Lez. 18 --- 03/05

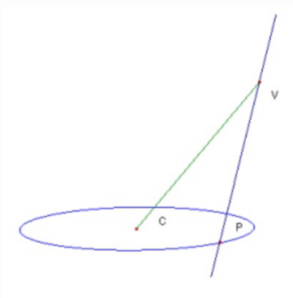
Il cono secondo Euclide e Archimede (prima di Apollonio)

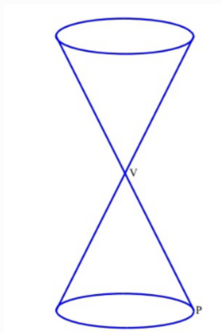
Sia per Euclide e Archimede sia per Apollonio, parliamo di coniche come sezioni di un cono. Si inizierà a parlare di coniche come curve piane, quindi luoghi di punti che soddisfano determinate condizioni, solo nel 1600.

Cosa intendiamo per cono?

Euclide e Archimede lo definiscono come un solido di rotazione ottenuto dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno a un suo cateto. Si ottiene una figura in senso Euclideo, cioè compresa da uno o più termini (finita, limitata).

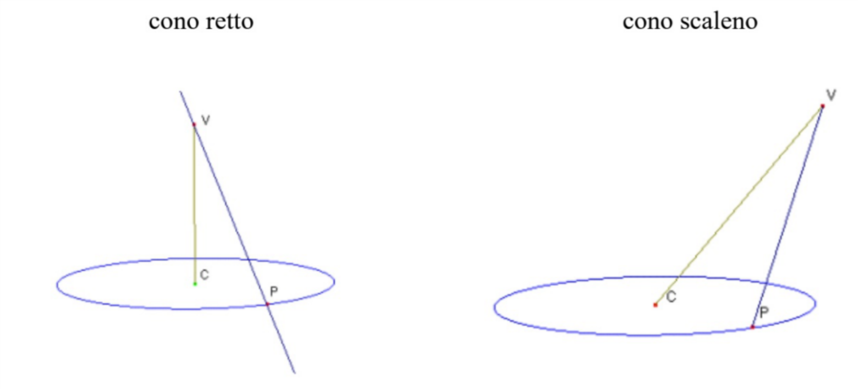
Se si interseca un cono con un piano passante per il vertice e per l’asse e perpendicolare alla





base si ottiene un triangolo.
L'angolo al vertice del triangolo può essere retto, acuto o ottuso in base al cono che si considera.

Se l'angolo al vertice del cono è retto, si ha il cono rettangolo, che si può ottenere dalla rotazione di un triangolo rettangolo isoscele attorno ad un cateto.
Intersecando il cono con un piano perpendicolare alla base, si costruisce la sezione chiamata "parabola".

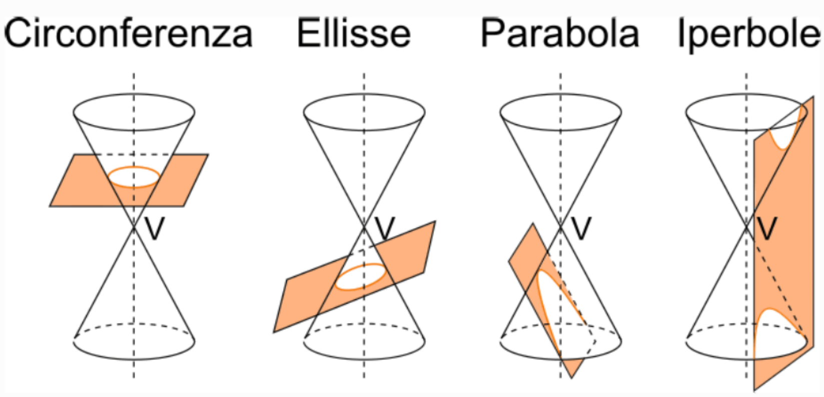


Se l'angolo al vertice del cono è acuto, si ha il cono acutangolo, ottenuto dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno al suo cateto maggiore.
Dalla sua sezione si ottiene un ramo di "iperbole".

Se l'angolo al vertice del cono è ottuso, si ha il cono ottusangolo, ottenuto dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno al suo cateto minore.
Intersecando il cono con un piano perpendicolare alla base, si costruisce la sezione chiamata "ellisse".

Si intersechi il cono con un piano passante per il vertice e perpendicolare alla base, ottenendo come sezione un triangolo. Si intersechi poi il cono con un altro piano, diverso dal precedente e perpendicolare alla base.
Si ottengono sezioni diverse al variare del cono che viene tagliato e su ogni cono si può costruire un solo tipo di conica:

• se il cono è rettangolo, si ottiene una sezione che sarà chiamata PARABOLA;
• se il cono è acutangolo, si ottiene una sezione che sarà chiamata IPERBOLE;
• se il cono è ottusangolo, si ottiene una sezione che sarà chiamata ELLISSE.



Possiamo dire che tutti i coni che

stiamo considerando:

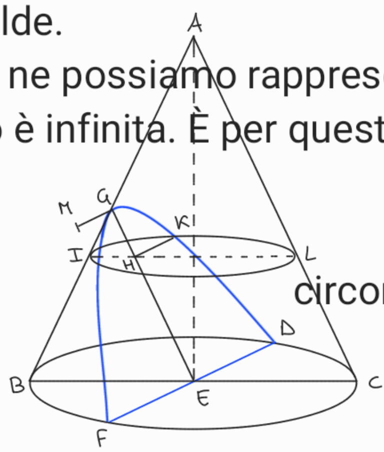
- sono retti, cioè l'asse del cono è perpendicolare alla sua base;
- hanno una sola falda, per cui l'iperbole avrà un solo ramo;
- sono figure in senso Euclideo, quindi sono finiti e limitati.

Inoltre non possiamo ottenere sezioni diverse su uno stesso cono.

Nei testi di Euclide e Archimede non vengono esplicitate le costruzioni di tali figure, ma lo si deduce solo da una lettura attenta di questi testi.

Il cono secondo Apollonio

Si consideri una circonferenza e un punto V fuori di essa.
Si tracci la retta VP passante per il punto V
e per un qualsiasi punto P della circonferenza.
Tenendo fisso il punto V e facendo ruotare la retta
infinita in modo che tocchi successivamente tutti
i punti della circonferenza, si ottiene un cono a due falde.
Queste due falde si estendono all'infinito, nonostante ne possiamo rappresentare solo una parte finita, perché la retta da cui si formano è infinita. È per questo che le coniche come le intendiamo oggi sono infinite.



In base alla posizione del punto V rispetto alla circonferenza, si possono costruire solo due tipi di cono:
• cono retto, quando l'asse
del cono è perpendicolare
alla sua base;
• cono scaleno, quando il suo
asse forma un angolo qualsiasi
(non retto) con la base.

Queste condizioni dipendono solo dalla posizione dell'asse del triangolo, e non più dagli angoli al vertice.

Il cono cosi definito:

- può essere anche obliquo, mentre nella classificazione precedente erano tutti coni retti ottenuti dalla rotazione di un triangolo rettangolo;
- ha due falde, per cui si puo parlare di due rami di iperbole;
- può essere prolungato all'infinito.

Inoltre, possiamo ottenere tutti e tre i tipi di sezioni nello stesso cono, variando soltanto l’inclinazione del piano secante.

Si intersechi il cono con un piano passante per il vertice e perpendicolare alla base, ottenendo come sezione un triangolo. Si intersechi poi il cono con un altro piano perpendicolare alla base, ottenendo una seconda sezione.

• Se l’asse di questa sezione è parallela ad un lato del triangolo, allora la curva ottenuta come intersezione è una parabola.
• Se il prolungamento dell’asse o diametro della sezione interseca il prolungamento di un lato del triangolo, allora la sezione ottenuta è una iperbole.
• Se il prolungamento dell’asse o diametro della sezione interseca la base il prolungamento della base del triangolo, allora la sezione ottenuta è una ellisse.
• Come caso particolare abbiamo la circonferenza, ottenuta secando il cono con un piano alla base.
Apollonio dedica 3 proposizioni alle costruzioni e alle definizioni delle coniche, nel primo libro degli elementi conici. Molti dei riferimenti a queste proposizioni si trovano nei trattati di “perspectiva”, cioè quella che poi sarà chiamata ottica geometrica. Allo studio dei fenomeni di riflessione e rifrazione si sono dedicati i matematici arabi, e nelle loro opere si considerano molto le coniche.

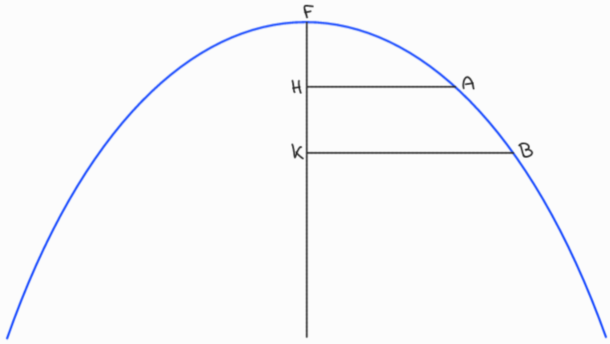
Prop. I,11) *“Se il cono ABC è tagliato da un piano passante per l’asse, ottenendo il triangolo ABC, e se è poi tagliato con un secondo piano che interseca la base del cono lungo una linea perpendicolare FED alla base del triangolo ABC; se, inoltre, il diametro GHE della sezione è parallelo a uno dei due lati del triangolo ABC, allora il quadrato di ogni segmento, tracciato dalla sezione FGD al suo diametro [ad esempio KH, chiamata “applicata al diametro della parabola”], è equivalente al rettangolo delimitato dal segemento compreso tra il vertice G della sezione e il putno H in cui il primo segmento interseca il diametro della sezione stessa, e da un “certo” segmento, il cui rapporto al segmento situato fra l’angolo del cono e il vertice della sezione è lo stesso di quello del quadrato della base del triangolo ABC al rettangolo delimitato dagli altri due lati del trianglolo. Chiamiamo tale sezione PARABOLA”.*

Siano $FED \perp BC$ e $GHE // AC$.
Allora $HK^2 = GH \cdot GM$
(relazione metrica, cioè tra lunghezze di segmenti, che esprime una parabola).
dove GM è un “certo” segmento tale che
$$GM : AG = BC^2 : (AB \cdot AC).$$

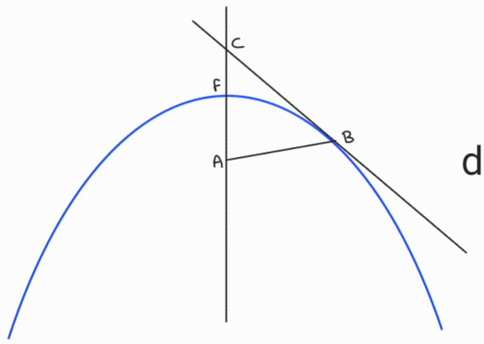
GM è un segmento perpendicolare al piano su cui giace la parabola, e che corrisponde al parametro k nella equazione della parabola $x^2=ky$.

Dobbiamo dimostrare che è verificata la relazione metrica $HK^2=GH \cdot GM$.

HK//FED perché perpendicolari allo stesso piano.
Tracciamo IHL//BC.
$HK^2=IH \cdot HL$ perché il piano passante per IHL è parallelo alla base del triangolo, per cui forma una circonferenza, e tracciando il triangolo IKL (essendo inscritto in una semi circonferenza) si avrà un triangolo rettangolo con ipotenusa IL su cui applichiamo il II TEO di Euclide.



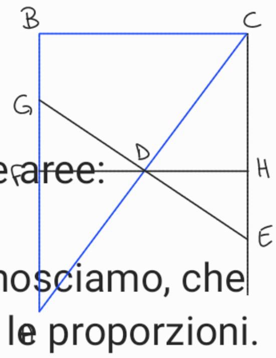
Per ipotesi $\frac{GM}{AG} = \frac{BC^2}{(AB \cdot AC)} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC}$



Per la similitudine (hanno i lati a due a due paralleli) dei triangoli IGH e ABC:
IH:IG=BC:AB
IH:GH=BC:AC
Per il parallelismo di GE e AC:
IH:IG=HL:AG (TEO di Talete).
Segue che HL:AG=BC:AB.

Allora GM:AG=(HL:AG)•(IH:GH)
Moltiplicando per GH numeratore e denominatore del primo membro, si ottiene:
$\frac{(GM \cdot GH)}{(AG \cdot GH)} = \frac{(HL \cdot IH)}{(AG \cdot GH)}$ da cui $GM \cdot GH=HL \cdot IH$.

Essendo $HL \cdot IH=HK^2$ si ottiene $GM \cdot GH=HK^2$.

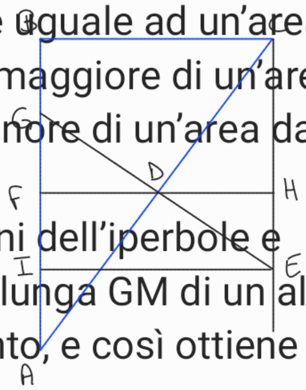


Questa relazione si può leggere come una uguaglianza tra due aree: ponendo $HK=x$, $GH=y$, $GM=k$ si ottiene $ky=x^2$ che corrisponde all'equazione della parabola come oggi la conosciamo, che abbiamo ottenuto ricorrendo solo a relazioni metriche tramite le proporzioni.

Applicazione delle aree (già incontrate nella PROP. I,44 di Euclide):

• applicazione parabolica: l'area che si deve applicare è uguale ad un'area data;
•applicazione iperbolica: l'area che si deve applicare è maggiore di un'area data;
• applicazione ellittica: l'area che si deve applicare è minore di un'area data.

Nelle proposizioni I,12 e I,13 Apollonio ricava le relazioni dell'iperbole e dell'ellisse, utilizzando lo stesso metodo. Nella I,12 prolunga GM di un altro segmento, nella I,13 GM è diminuito di un altro segmento, e così ottiene aree maggiori o minori rispettivamente.

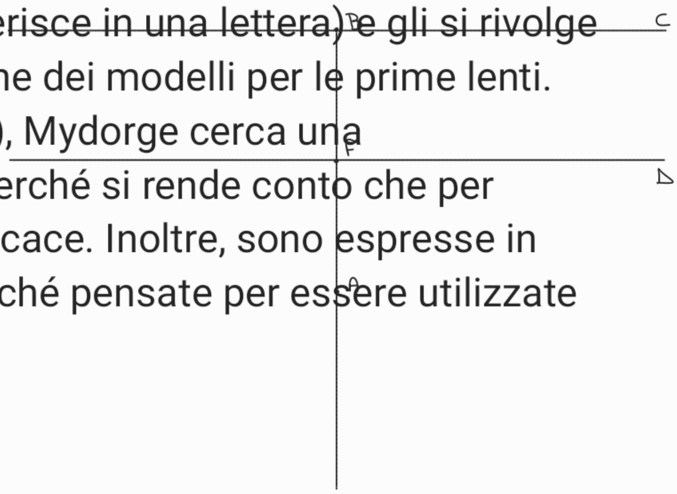


Lez. 19 --- 09/05

Claude Mydorge (1585 - 1647)

Il discorso sulle coniche definite come luogo di punti del piano comincia con i matematici arabi e viene sviluppato a partire dal 1600.

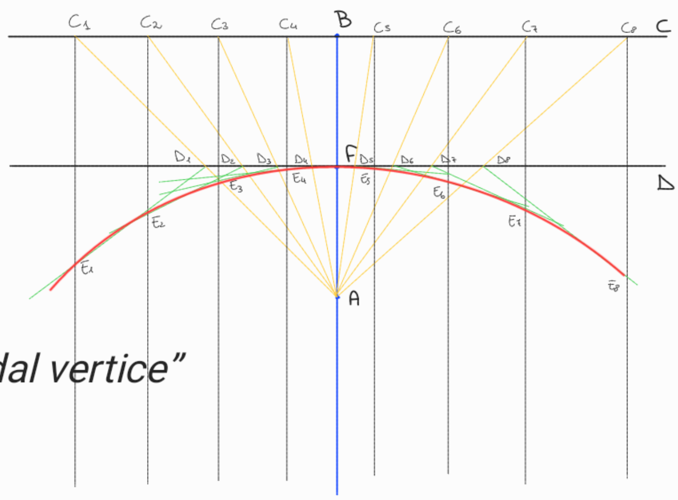
Uno dei primi tentativi di passaggio alle coniche viste come sezioni di un cono alle coniche come curve piane è stato fatto da Claude Mydorge, molto conosciuto nel mondo culturale della prima metà del XVII sec; Cartesio lo reputa il matematico più eccellente del tempo (come riferisce in una lettera) e gli si rivolge per assistere l'artigiano incaricato nella creazione dei modelli per le prime lenti. Negli 8 libri del suo trattato sulle coniche (1639), Mydorge cerca una trasposizione delle coniche dal cono al piano, perché si rende conto che per applicarle alla costruzione delle lenti era più efficace. Inoltre, sono espresse in modo semplice e facilmente comprensibile, perché pensate per essere utilizzate da artigiani, e non da menti matematiche.



PARABOLA: Nozioni preliminari

Prop. I,7) *"In ogni parabola, se da due punti della sezione si tracciano due ordinate [cioè segmenti condotti da qualsiasi punto della parabola perpendicolarmente al diametro della parabola], i loro quadrati sono in un rapporto uguale a quello dei rispettivi segmenti che staccano sull'asse a cominciare dal vertice"*

$AH^2:BK^2=FH:FK$



Prop. I,47) *"Se la retta tangente alla parabola in un punto interseca il prolungamento dell'asse,* *la distanza di questo punto dal fuoco è uguale alla distanza del fuoco dal punto di intersezione".*

BA=AC

PARABOLA: Proposizioni preliminari alla costruzione

Prop. II,17) *"Sia dato un qualunque triangolo ABC, rettangolo in B; si divida AC in due parti uguali nel punto D e si costruisca DE perpendicolare ad AC; da C si conduca CE parallelo ad AB, che intersechi DE nel punto E. Si divida AB in due parti uguali nel punto F. Allora E si trova su una parabola di vertice F e fuoco A".*

Sappiamo che:
$A\hat{B}C=90°$ AD=DC DE⊥AC CE//AB AF=FB

Sia G il punto di intersezione di DE con AB.
Si tracci FH//BC.
Allora FH passa per D per il TEO di Talete.

I triangoli FDA e HDC sono congruenti per il II criterio di congruenza => FD=DH.
I triangoli FGD e HDE sono congruenti per il II criterio di congruenza => HE=FG.
Si tracci EI parallela a BC.
Allora HE=IF=FG.

Nel triangolo ADG, rettangolo in D, si ha:
$FD^2=AF \cdot FG$ (II TEO di Euclide)
$FD^2=AF \cdot IF$ perché FG=IF
$4FD^2=4AF \cdot IF$ (moltiplicando per 4)
$(2FD)^2=IF \cdot 4AF$

Essendo 2FD=FH=EI si ottiene $EI^2=IF \cdot 4AF$.
Dunque il punto E si trova sulla parabola di vertice F e fuoco A perché vale la relazione di Apollonio: EI è una applicata al diametro, IF la distanza che EI stacca dal vertice e 4AF il parametro.

Spostando il vertice C a destra e a sinistra di B, utilizza questa stessa costruzione per trovare un certo numero di punti che formano la parabola, tramite la:

Prop. II,19) *"Dati per posizione il fuoco e il vertice di una parabola, descrivere nello stesso piano la parabola per punti".*

Siano A il fuoco e F il vertice di una parabola.
Si tracci AF e la si prolunghi fino al punto B in modo tale che sia AF=FB.
Dal punto F si tracci FD perpendicolare ad AB e la si prolunghi quanto si vuole.
Dal punto B si tracci BC parallela ad AB e la si prolunghi quanto si vuole.

Si scelgano su BC quanti punti si vogliono Ci.
Si unisca ogni Ci con A.
Ogni retta ACi interseca FD in Di.

Dai punti Ci si traccino le parallele ad AB.
Dai punti Di si traccino le perpendicolari alle rette ACi. Tali perpendicolari intersecano le parallele ad AB condotte dai punti Ci nei punti Ei.

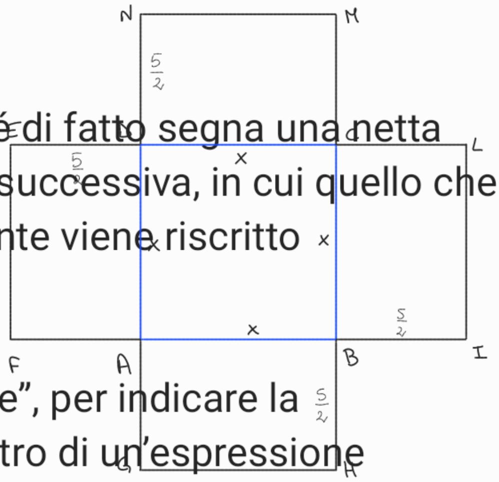
Per la prima proposizione preliminare, i punti Ei si trovano su una stessa parabola di vertice F e fuoco A.
Più punti Ci si prendono, migliore è la costruzione.
In questa costruzione possiamo costruire i punti con riga e compasso, tuttavia per congiungere i punti Ei, dice Mydorge, serve un segno tracciato da una mano ferma; di fatto non c'è ancora uno strumento adatto a costruire la parabola, perciò non si può parlare di costruzione con riga e compasso.

Le origini dell'algebra

Le origini dell'algebra sono ancora oggi dibattute.

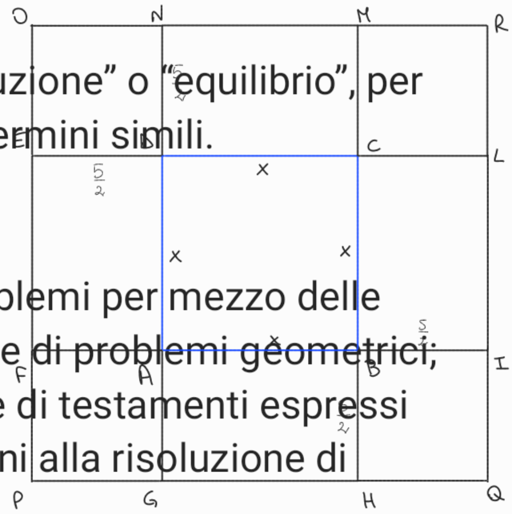
Abū Jaʿfar Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī vive probabilmente tra il 780 e l'850 a Baghdad. La sua opera "Kitāb al-jabr wa al-muqābala" (813-830 d.C.) segna la comparsa ufficiale del termine "al-jabr", cioè "algebra", nel contesto di questioni matematiche. È di fatto il primo trattato di algebra.
Questo fa pensare che l'algebra trovi origine nel contesto matematico arabo.

Tuttavia, nel secondo libro degli "Elementi" di Euclide si trovano molte proposizioni dell'algebra elementare dimostrate dal punto di vista geometrico (es. i prodotti notevoli). È per questo che si pensa che l'origine dell'algebra sia da ricercarsi nell'opera di Euclide. L'ipotesi più accreditata è la prima, quindi che l'algebra ha origine tra i matematici arabi.



È importante focalizzare la nascita dell'algebra perché di fatto segna una netta demarcazione tra la matematica precedente e quella successiva, in cui quello che prima era stato descritto o dimostrato geometricamente viene riscritto utilizzando i simboli dell'algebra.

Il termine "algebra" potrebbe significare "restaurazione", per indicare la trasposizione dei termini sottratti da un membro all'altro di un'espressione matematica (che solo dopo verranno definite equazioni).



Una traduzione di "al-muqābala" potrebbe essere "riduzione" o "equilibrio", per indicare la cancellazione o la messa in evidenza dei termini simili.

Il trattato di al-Khwārizmī è diviso in due parti:
PARTE I: equazioni, calcolo algebrico, soluzioni di problemi per mezzo delle equazioni, applicazione delle equazioni alla risoluzione di problemi geometrici;
PARTE II: "Il libro dei testamenti": problemi di eredità e di testamenti espressi secondo il diritto islamico, applicazione delle equazioni alla risoluzione di problemi giuridici.
Nell'introduzione al trattato, al-Khwārizmī scrive che è stato sollecitato dal califfo al-Maʾmūn a scrivere un libro sintetico e conciso sul calcolo dell'algebra e dell'al-muqābala, al fine di risolvere i problemi che riguardavano la società del tempo.

Durante il califfato di al-Maʾmūn si sviluppa notevolmente la cosiddetta "Casa della Saggezza" di Baghdad, "Bayt al-Ḥikma", nata sotto il califfato del padre come sua biblioteca personale; con al-Maʾmūn diventa la prima e tra le più importanti istituzioni culturali del mondo arabo: oltre ad ospitare una grande biblioteca, la struttura fungeva anche da università pubblica e da una sorta di ospedale per chiunque ne avesse bisogno, ad accesso gratuito.

Al-Khwārizmī divide le equzioni di secondo grado in semplici e combinate:

Le equazioni semplici:
- i quadrati sono uguali a radici $ax^2=bx$
- i quadrati sono uguali a un numero $ax^2=c$
- le radici sono uguali a un numero $bx=c$

Nella risoluzione di tali equazioni si trova l'idea del completamento del quadrato, ancora oggi utilizzata.

Le equazioni combinate:

- i quadrati più le radici sono uguali a un numero $ax^2+bx=c$
- i quadrati più un numero sono uguali alle radici $ax^2+c=bx$
- le radici più un numero sono uguali ai quadrati $bx+c=ax^2$

Per ognuno di tali tipi di equazione, al-Khwārizmī riporta numerosi esempi.
Di essi, dopo aver indicato il procedimento per la risoluzione, illustra gli stessi risultati per via geometrica, come se non ritenesse il ragionamento algebrico una vera dimostrazione, come se l'algebra avesse bisogno del sostegno della geometria per essere valida.
Solo dal 1500 in poi, l'algebra inizierà a staccarsi dalla geometria.

Nelle equazioni combinate non viene mai scritto =0, proprio perché dovendo dare una dimostrazione geometrica per poter considerare valido il calcolo algebrico, un segmento lungo zero non avrebbe avuto rilevanza.

Es. $x^2+10x=39$.

Sia ABCD un quadrato di lato $AB=x$.
Se moltiplichiamo AB per un numero qualunque otteniamo il "numero delle radici".
Nel caso considerato, il numero è 10 e il numero delle radici è $10x$.

Consideriamo la quadra parte di 10, cioè $5/2$, e costruiamo sui lati del quadrato ABCD quattro rettangoli congruenti di dimensioni x e $5/2$.

La somma delle aree di questi rettangoli è uguale al numero delle radici:
$A(DCMN)+A(CBIL)+A(BAGH)+A(ADFE)=10x$.

Completiamo la costruzione con quattro quadrati di lato $5/2$. Risulta:
$A(AFPG)+A(BHQI)+A(CLRM)+A(DNOE)=25$.

Sapendo che A(ABCD)+A(DCMN)+A(CBIL)+A(BAGH)+A(ADFE)=39 risulta:
A(ABCD)+A(DCMN)+A(CBIL)+A(BAGH)+A(ADFE)+A(AFPG)+A(BHQI)+A(CLRM)+A(DNOE) = 39+25 = 64.

Cioè A(PQRO)=64.
Quindi PQ=8.

Essendo AB=GH=PQ-PG-HQ, risulta
AB=8-(5/2)-(5/2)=3.

Dunque x=3.

In questa dimostrazione al-Khwārizmī affianca il procedimento algebrico a quello geometrico: ogni passaggio algebrico ha un suo corrispettivo geometrico, andando a costruire la soluzione.

Questa dimostrazione segue un procedimento geometrico.

Lez. 20 --- 10/05

Es. $x^2+10x=39$.

La precedente dimostrazione, algebricamente equivale ai seguenti passaggi:

$x^2+bx=c$
$b/2 \Rightarrow b/2 \cdot b/2=b^2/4$

$(b^2/4)+c=(b/2)^2+c=(x+b/2)^2$

Area quadrato maggiore

$\Rightarrow \sqrt{(b/2)^2+c}=(x+b/2)$

$\Rightarrow x=\sqrt{(b/2)^2+c}-b/2$

Che corrisponde alla formula risolutiva delle equazioni di II grado.

$x=-b/2+\sqrt{(b/2)^2+c}$

dove però si considera solo il segno positivo perché x è un segmento, perciò non può essere negativo.

Nel caso di $x^2=2x+1$ ci sono due interpretazioni:

Mondo arabo: trovare un numero x tale che moltiplicato per se stesso sia uguale al successivo del suo doppio;

Mondo greco: trovare un segmento tale che il quadrato costruito su di esso sia equivalente alla somma di un rettangolo di dimensioni 2 e x e di un quadrato di lato 1.

Tale distinzione ha origine dall'assetto sociale: la figura del mercante era centrale nel mondo arabo e marginale in quello greco; per questo motivo si vengono a sviluppare rispettivamente il calcolo e la geometria.

SCUOLE D'ABACO: scuola medievale per l'apprendimento del calcolo.

--> passaggio dall'algebra da pratica a scienza.

Principalmente a Bologna nel 1500

Bombella, si propone di mettere insieme metodo pratico e razionale;

Cardano;

Tartaglia;

Cataldi.

Fino al '500, l'algebra e la geometria camminano fianco a fianco, anche se la prima continua a esercitare il suo primato sulla seconda.

"Algebra classica" o "algebra degli antichi" o "algebra numerica o numerosa" (incognite numeri).

Dalla traduzione dei libri di Diofanto di Alessandria (250 a.C.) comincia a svilupparsi la cosiddetta "algebra dei moderni" o "algebra speciosa" o "algebra simbolica" (coefficienti lettere).

Si fa risalire l’inizio dell’algebra simbolica alla pubblicazione degli scritti matematici di François Viète (1591).

D'Alembert --> Teorema fondamentale dell’algebra: un polinomio di grado n ha n radici.

L’algebra classica si occupava di equazioni fino a III e IV grado.

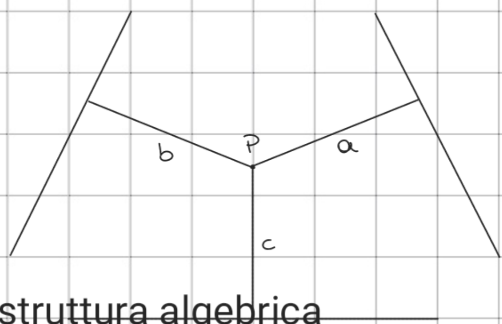
Ruffini e Abel (circa 1820) --> “Non esiste una formula risolutiva per le equazioni di V grado”.

Galois --> scopre il legame tra Teoria delle equazioni algebriche e Teoria dei gruppi; meglio compreso a fine ‘800 grazie anche a Jordan.

Studio di insiemi di elementi di natura imprecisata dotati di operazioni che devono soddisfare determinate proprietà formali --> Algebra (odierna).

Arità --> su quanti oggetti agisce un’operazione. Ad esempio un’equazione binaria ha arità 2.

Algebra universale



--> 1960 --> Kurosch (1962), Cohn (1965)

--> ricerca metodi e risultati validi per una qualunque struttura algebrica

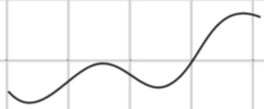
--> teoria delle categorie

Contributo significativo allo sviluppo dell’algebra lo diede Cartesio.

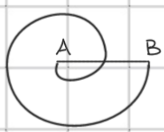
Nella seconda metà del ‘500 si ripropone il problema di cosa sia la verità, la certezza.

René Descartes, detto Cartesio (1596-1650)

“Regole per la guida dell’intelligenza” (1628) -> la certezza e la verità si trovano solo nella matematica.



“Discorso sul metodo” (1637) -> critica gli antichi poiché, nonostante i risultati ottenuti non hanno impartito un metodo.



Comprende 3 appendici:

- Meteore: problemi astronomici
- Diottrica: problemi fisici e geometrici
- Geometria

Spesso staccate dall'opera principale, tant'è che nel 1640 "Geometria" viene stampata singolarmente.

La "Geometria" è divisa in 3 libri:
I: problemi piani (costruibili con riga e compasso);
II: natura delle curve;
III: costruzione di problemi solidi e lineari.

I libro

Per risolvere un problema si deve procedere nel modo seguente:

1. considerarlo come già risolto;
2. assegnare una lettera ad ogni grandezza, sia a quelle note sia a quelle ignote;
3. senza fare distinzione tra grandezze note e ignote, seguire un procedimento che consenta alla fine di esprimere una stessa quantità in due modi.

Questo procedimento è chiamato METODO ANALITICO.

Cambia radicalmente il concetto di soluzione:

Costruzione -> relazione di coordinate

Nel 1637, in una lettera a Marin Mersenne, replicava le critiche di un certo Jean de Beaugrand: "Nella Diottrica e nelle Meteore io ho cercato di persuadere che il mio metodo era il migliore; ho dimostrato ciò nella Geometria. Il modo in cui ho affrontato e risolto il problema di Pappo non trova riscontro nell'Apollonius Redivivus di Ghetaldi , né nell'Apollonius Batavus di Snell, e neanche nel De maximis et minimis di Fermat".

Relativamente al problema di Pappo, Cartesio fa quanto segue:
suppone di prendere tre lettere di cui non conosce la posizione;
sceglie un qualunque punto P;
del punto P traccia le rette a, b, c che intersecano le rette precedenti sotto un certo angolo.

Tra a, b, c esistono relazioni che consentono, conoscendo una grandezza, di conoscere le rimanenti:

$a^2=b\cdot c$
$b^2=a\cdot c$
$c^2=a\cdot b$

Origine del piano cartesiano.

Oggi non è chiara la distinzione di curve di Cartesio:
- Ente geometrico
- Equazione
- Soluzioni

II LIBRO

Curve geometriche e meccaniche:
Curve geometriche: descritte da un punto che si muove di moto continuo;
Curve meccaniche: descritte da un punto che si muove di moto composto.

Data una curva, a essa si può far corrispondere un'equazione.

Genere di una curva:
- Genere 0: curve che hanno equazione di I grado (rette);
- Genere 1: curve che hanno equazione di II grado;
- Genere 2: curve che hanno equazione di III e IV grado;
- Genere 3: curve che hanno equazione di V e VI grado.

DIS

$f(x,y)=0$

$OP=v$

$CP=r$

$CP^2=CH^2+HP^2$

$c' \dashrightarrow c$

$c(y,x)$

$HP=v-y \Rightarrow r^2=x^2+(v-y)^2$

$r^2=x^2+v^2+y^2-2vy$

$x^2=r^2-v^2-y^2+2vy$

$f(x,y)=f(r,v,y)=0$

Non si possono mettere insieme equazioni di III e IV grado poiché alcune equazioni sono irriducibili (critica di Fermat alla classificazione dei generi).

Sempre nel II libro tratta curve speciali (ovali) ed estende il metodo.

III libro

TEO fondamentale dell'algebra.

"Data l'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$, possiamo scriverla come $a(x-x_1)(x-x_2)=0$, dove x_1 e x_2 sono radici distinte".

Relazione tra le radici e i coefficienti dell'equazione:

$x_1+x_2=-b/a$

$x_1*x_2=c/a$

Regola dei segni:

a>0	b	c			segno radici
+	+	+	P	P	2 negative
+	+	-	P	V	1 neg 1 pos
+	-	+	V	V	2 positive
+	-	-	V	P	1 pos 1 neg

Dove P=negativo e V=positivo.

Il pensiero di Cartesio viene accolto in Francia, Olanda e altri paesi europei esclusa l'Italia, a causa del pensiero galileiano e la recente scomunica, l'ignoranza nell'algebra e la paura dell'Inquisizione.

Lez. 22 --- 17/05

La ricerca delle terne pitagoriche

DIS TRIANGOLO RETTANGOLO

Sia ABC un triangolo con $B\hat{A}C=90°$.

Se si pone AB=x, AC=Y, CB=z, allora si può dare una lettura algebrica del TEO di Pitagora, quindi scrivere

$x^2+y^2=z^2$

La terna (x, y, z) è detta "terna pitagorica", e consente di costruire un triangolo che abbia dimensioni x,y,z.

Una terna pitagorica (x, y, z) si dice primitiva se non esiste un intero diverso da 1 che divide contemporaneamente x, y, z.

Data una terna pitagorica (x, y, z) da essa possono ricavarsi infinite altre terne sue “multiple” (kx, ky, kz) al variare di k tra gli interi positivi.

$(kx)^2+(ky)^2=k^2(x^2+y^2)=(kz)^2$??????????????

Questo dal punto di vista geometrico significa che a partire da un triangolo rettangolo avente i lati x,y,z, possiamo costruire infiniti angoli simili tra di loro e simili a quello di partenza, e che hanno come lati kx,ky,kz, con k che varia tra gli interi positivi.

Ci si è chiesto allora come si potesse costruire una terna pitagorica a partire da un qualsiasi numero intero.

Nel “Commento al primo libro degli Elementi di Euclide” di Proclo si trovano due metodi per determinare terne pitagoriche, ottenuti per via empirica e attribuiti rispettivamente a Pitagora e a Platone.

Metodo pitagorico:

Si parte da un numero x dispari, che costituisce il primo numero della terna.

Il secondo è $(x^2-1)/2$.

Il terzo numero si ottiene aggiungendo 1 al secondo, quindi è $(x^2-1)/2 +1$, cioè $(x^2+1)/2$.

$(x, (x^2-1)/2, (x^2+1)/2)$

es. (7, 24, 25)

Metodo platonico:

Si parte da un numero x pari, che costituisce il primo numero della terna.

Il secondo numero è $(x/2)^2-1$.

Il terzo numero è $(x/2)^2+1$.

$(x, (x/2)^2-1, (x/2)^2+1)$

Es. (6, 8, 10)

A partire dalla lettura algebrica del TEO di Pitagora, ci si è posti il problema di generalizzare l'equazione $x^2+y^2=z^2$ nella forma: $x^n+y^n=z^n$.

Trovare le soluzioni positive intere per x, u, z per n≥3 costituisce l'ultimo TEO di Fermat (1637).

La dimostrazione dell'impossibilità di trovare le soluzioni è stata fatta nel 1994 da A. J. Wiles.

Geometria proiettiva

Le origini della geometria proiettiva sono da ricercarsi nell'ambito artistico, facendo riferimento alla prospettiva dei pittori.

Il primo pittore ad applicare i principi della prospettiva è Ambrogio Lorenzetti, nel suo dipinto dal titolo "Annunciazione" (1344).

Le immagini delle rette che sono parallele fra loro nella scena reale e ortogonali al quadro convergono in un punto, che sarà chiamato dai pittori "punto di fuga"; nel linguaggio matematico sarà chiamato "punto all'infinito".

Tanti altri pittori iniziano poi ad applicare le regole della prospettiva nelle loro opere; tra i primi ricordiamo Cennino Cennini, Filippo Brunelleschi, Donatello, Masaccio, Paolo Uccello, Mantegna, etc...

Alcuni pittori decidono di scrivere libri sulla geometria ad uso dei pittori, quindi riportando solo gli elementi utili alla realizzazione delle loro opere e scrivendoli in maniera più semplice rispetto ai trattati di geometria destinati ai matematici.
Alcuni esempi:

• Leon Battista Alberti, in particolare nel suo "De Pictura" (1435) troviamo gli elementi essenziali che servono per la prospettiva, tra cui i raggi visivi, la piramide, i punti di fuga, il cono ottico, etc.

• Piero della Francesca, "De perspectiva pingendi" (1475), considerato il primo trattato sistematico di prospettiva per le novità che apporta, tra cui l'applicazione del metodo dimostrativo, costruttivo della geometria alla pittura.

• Leonardo da Vinci, “La pittura”

• Albrecht Durer

• Guido Ubaldo Del Monte, “Perspectiva libri sex” (1600), è il primo pittore che enuncia la “legge del punto di fuga”, secondo cui tutte le rette parallele fra di loro e parallele all’orizzonte convergono sempre verso un punto dell’orizzonte. È il primo a dimostrare che la proiezione di un sistema di rette parallele su un piano è un sistema di rette convergenti da uno stesso punto, il punto di fuga.

Il passaggio decisivo dalla prospettiva alla geometria proiettiva avviene con un architetto francese, Girard Desargues (1593-1662), con la sua opera “Trattato sulle coniche avente per titolo: Progetto in brutta copia su ciò che succede nell’intersezione fra un cono e un piano”, in francese conosciuto come “Broullion Project” (1639). Qui traduce la prospettiva nel linguaggio della geometria.

Quella di Desargues è una geometria che si presenta come radicalmente nuova rispetto alla geometria precedente, anche se parte da queste geometrie per rivoluzionarle.

Quasi subito non si ha traccia delle copie stampate. Si trova una annotazione su esso, risalente al 1679, da parte di Philippe La Hire, discepolo di Desargues che aveva seguito la composizione dell’opera.

È ritenuto un testo difficile, soprattutto perché Desargues prende spunto dalla matematica dei pittori e inventa un nuovo linguaggio, con l’intenzione di semplificarlo in favore di architetti e pittori. Usa quindi termini come “nodo”, “tronco”, “ramo” per indicare oggetti geometrici come un punto su una retta, una retta, rette che si intersecano.

Presenta le coniche come “trasformazioni” visive (proiettive) di una circonferenza da una semisfera su un piano.

A partire da questo momento si considera la retta infinita e il segmento formato da infiniti punti, ed emerge la differenza tra essere limitato ed essere composto da infiniti punti.

Troviamo bene espressa la differenza tra fasci di rette propri e impropri: se nella geometria euclidea i fasci di rette parallele impropri non avevano un centro, a differenza dei fasci propri, nella geometria proiettiva tutti i fasci di rette hanno un centro, con la differenza che è un punto al finito per un fascio proprio e un punto all'infinito per un fascio improprio. La stessa distinzione si applica ai fasci di piani propri e impropri, che si intersecano in una retta all'infinito. Nella geometria proiettiva tutto si incontra.

I POSTULATO della geometria proiettiva

"Due rette in uno stesso piano hanno sempre un punto comune".

Nasce il problema di rappresentare una scena reale su un piano. Le stesse rette si incontrano in più punti a seconda del punto di vista dell'osservatore, ma si tratta dello stesso punto o di punti diversi? Di fatto le rette convergono da due versi in un unico punto all'infinito. L'insieme dei punti all'infinito forma la retta all'infinito, cioè l'orizzonte.

La retta e le figure non sono più limitate né potenzialmente infinite ma sono realmente infiniti.

Fissiamo un punto A su una retta.

Consideriamo su di essa un certo numero di punti

E le coppie d segmenti: (AB, AC)   (AD, AE)   (AF, AG)

Se AB•AC=AD•AE=AF•AG=costante, allora:

Le tre coppie di segmenti costituiscono un "albero";

La retta BD è il "tronco dell'albero";

Il punto A è il “ceppo dell’albero” (origine);

Ciascuno dei segmenti è un “braccio” o “ramo”;

Ciascun punto è un “nodo”;

I sei punti B, C, D, E, F, G sono in “involuzione”.

Per poter determinare in maniera univoca un albero si necessita di un tronco, un ceppo e di una costante, con la quale accoppiare i rami per soddisfare l’equivalenza.

Se poniamo l’origine fuori dalla retta arriviamo al concetto di involuzione attuale:

Sia data una retta ed un punto A fuori di essa che sarà l’origine. Presi altri punti sulla retta si individuano dei segmenti. I punti B, C, D, E sono in involuzione se (e solo se) vale la relazione: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

Il punto A è il centro dell’involuzione ed è il punto corrispondente al punto all’infinito.

(B, C) e (D, E) sono due coppie di punti coniugati o corrispondenti. Si parla di quattro punti in involuzione e non sei come nel caso di Desargues.

Il prodotto costante (per ogni coppia di punti coniugati) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ è detto “potenza” o “modulo” dell’involuzione.

Immaginiamo di avere una sorgente luminosa in un punto O.

Consideriamo 3 raggi che tagliamo con una retta individuando i punti A, B, C.

A, B, C sono legati da una proiezione e in un rapporto semplice:

$(ABC) = AC/BC$

Consideriamo invece 4 raggi che tagliamo con una retta individuando i punti A, B, C, D.

A, B, C, D sono legati da una proiezione e in un birapporto:

$(ABCD)=(ABC)/(ABD)=(AB/BC)/(AD/BD)=(AC/BC)\cdot(BD/AD)=(AC/AD)\cdot(BD/BC)$

Se i quattro raggi luminosi tagliano una seconda retta, O viene proiettato in altri quattro punti per i quali possiamo ancora parlare di birapporto, e con un procedimento analogo al precedente avremo:

$(A'B'C'D')=(A'C'/A'D')\cdot(B'D'/B'C')$

In particolare

Se $(ABCD)=1$, allora A,B,C,D sono in involuzione, cioè $AC\cdot BD=AD\cdot BC$

Se $(ABCD)=-1$, allora A,B,C,D costituiscono un gruppo armonico.

Alcune proprietà del birapporto:

Scambiando tra di loro coppie di punti, il birapporto non cambia:
$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)$

Il birapporto è un'invariante rispetto alle operazioni di proiezione e di sezione, per cui: $(ABCD)=(A'B'C'D')$

Lez. 23 --- 23/05